

**Konzeption, Optimierung und theoretische Fundierung
eines Meßsystems für Gravitationsexperimente
am Fallturm Bremen**

**Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
doctor rerum naturalium (Dr. rer. nat.)**

Vorgelegt dem Rat der Physikalisch-Astronomischen Fakultät
der Friedrich Schiller Universität

von Dipl. phys. Jürgen von Zameck Glyscinski
geboren am 1. September 1967 in Müncheberg

Gutachter

- 1. Prof. Dr. Paul Seidel**
- 2. Prof. Dr. G. Schäfer**
- 3. Prof. Dr.-Ing. Hans J. Rath**

Tag des Rigorosums: 01.11.2000

Tag der Öffentlichen Verteidigung: 28.11.2000

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Grundlagen	3
2.1	Das schwache Äquivalenzprinzip	3
2.1.1	Eötvöskoeffizient	5
2.2	Gravitation	6
2.2.1	Linear abnehmende Fallbeschleunigung	7
2.3	Supraleitung	8
2.3.1	Magnetische Eigenschaften	8
2.3.2	Elektrische Eigenschaften	10
2.3.3	Quantenmechanische Eigenschaften	10
2.4	SQUID	11
2.5	Meßsystem	12
3	Positionsdetektor	15
3.1	Vorbetrachtungen	15
3.2	Einfacher Positionsdetektor	17
3.3	Symmetrischer Positionsdetektor	18
3.3.1	Schaltung	18
3.3.2	Empfindlichkeit	19
3.3.3	Kräfte auf den Detektor	20
3.3.4	Linearer Detektor	21
3.3.5	Seitliche Bewegung	23
3.4	Differentieller Detektor	25
3.4.1	Schaltung	25
3.4.2	Empfindlichkeit	26
3.4.3	Kräfte auf die Körper	27
3.4.4	Linearer Detektor	28
3.5	Detektor mit direkter Rückkopplung	31
3.5.1	Vorbetrachtungen	31
3.5.2	Schaltung	31
3.6	Differenzdetektor mit Rückkopplung	34
3.7	SQUID-Elektronik	36
3.7.1	Vorbetrachtungen	36
3.7.2	Aufbau	36

3.7.3	Modell	36
3.7.4	Linear ansteigendes externes Signal	38
3.7.5	Quasistationäre Lösungen	40
3.7.6	Experimentelle Ergebnisse und Schlußfolgerungen	41
3.8	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	42
4	Induktivitätsverläufe	45
4.1	Vorbetrachtungen	45
4.2	Gerader Leiter vor einer supraleitenden Ebene	45
4.3	Gerader Leiter in einem supraleitenden Zylinder	47
4.4	Gerader Leiter außerhalb des Zylinders	48
4.5	Ringspule vor einer supraleitenden Ebene	49
4.6	Verallgemeinerung	51
4.7	Flache Mäanderspule und supraleitende Ebene	52
4.8	Drahtring und supraleitende Kugel	53
4.9	Tauchspulen	55
4.10	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	56
5	Optimierung der Testkörper	58
5.1	Vorbetrachtungen	58
5.2	Momente eines Doppelringes	59
5.3	Momente eines Rotationskörpers	60
5.4	Momente eines Zylinders	61
5.5	Zusammengesetzte Körper	62
5.6	Weitere Körper	62
5.7	Optimierung der Testkörper	64
6	Positionierung der Körper	66
6.1	Vertikale Positionierung	66
6.1.1	Anforderungen	66
6.1.2	Positionierung	67
6.1.3	Positionierung in zwei Phasen	70
6.2	Horizontale Stabilisierung	71
6.2.1	Vorbetrachtungen	71
6.2.2	Konfiguration der Spulen	73
6.3	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	76
7	Datenauswertung	79
7.1	Das Auswerteverfahren	79
7.1.1	Modell	79
7.1.2	Grundlagen	80
7.1.3	Quadratischer Fit	82
7.1.4	Ermittlung der Standardabweichung	83

7.1.5	Einfluß eines Tiefpasses	86
7.2	Abschätzung des Auflösungsvermögens	87
7.3	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	88
8	Ergänzende Betrachtungen	90
8.1	Externe Flüsse	90
8.2	Bestimmung der Absolutposition	92
8.3	Symmetrie	92
8.4	Auswirkung von Nichtlinearitäten	93
8.5	Meßgrenzen	95
9	Zusammenfassung und Schlußfolgerungen	98

Einleitung

Nach den bisherigen Erkenntnissen lassen sich die Wechselwirkungen zwischen Objekten der Natur mit Hilfe von 4 Grundkräften erklären, nämlich der gravitativen, der elektromagnetischen, der schwachen und der starken Wechselwirkung. Eines der Ziele der modernen Physik besteht darin, diese 4 Wechselwirkungen in einer einheitlichen Theorie zu beschreiben. Mit der Theorie der elektro-schwachen Wechselwirkung existiert eine etablierte Theorie zur gemeinsamen Beschreibung von schwacher und elektromagnetischer Wechselwirkung und auch für die Einbeziehung der starken Wechselwirkung in der großen Vereinigung gibt es vielversprechende Ansätze [1]. Die Einbeziehung der am längsten bekannten Wechselwirkung, der Gravitation, ist jedoch noch nicht gelungen. Es gibt zwar mit der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) von Einstein eine allgemein anerkannte Theorie, die im Einklang mit allen bisherigen experimentellen Daten steht, es bestehen jedoch Schwierigkeiten ART und Quantentheorie in Einklang zu bringen. Neben der ART existieren daher eine Reihe weiterer Gravitationstheorien, die z.B. die Erkenntnisse der Quantentheorie berücksichtigen und daher als Ausgangspunkt einer Vereinigung mit den anderen Grundkräften dienen können [2,3]. Als Kriterium für die Richtigkeit einer Theorie gilt dabei das Experiment. Man kann zwar mit Hilfe von Experimenten nicht die Richtigkeit von Theorien beweisen, doch läßt sich zumindest ein Teil der falschen Theorien widerlegen. Trotz der Vielzahl von Experimenten zur Überprüfung unterschiedlicher Aspekte der ART [4–7] besteht auch weiterhin ein großes Interesse der Gravitationstheoretiker an weiteren Experimenten. Dies betrifft einerseits die Verbesserung der Genauigkeit der Tests, zum anderen aber auch die Versuchsbedingungen (Dauer der Untersuchungen, Material und Abstand der gravitierenden Objekte).

Im Rahmen eines von der DLR geförderten Projektes führt eine Arbeitsgruppe des Instituts für Festkörperphysik der Friedrich-Schiller-Universität Jena in Kooperation mit dem ZARM Bremen Experimente am dortigen Fallturm durch, die einer Überprüfung des schwachen Äquivalenzprinzips (SÄP) dienen. Dieses Prinzip, das in Kap. 2.1 näher erläutert wird, bildet eine der Grundlagen der ART. Bei diesen Experimenten soll überprüft werden, ob zwei Körper aus unterschiedlichen Materialien die gleiche Fallbeschleunigung erfahren. Um die dabei auftretenden kleinen Verschiebungen mit hoher Genauigkeit messen zu können, kommen dabei SQUID-basierte Positionsdetektoren zum Einsatz. Mit Hilfe dieser Experimente soll die bisher erzielte Genauigkeit der Überprüfung (Definition der Genauigkeit siehe Kap. 2.1) deutlich übertroffen und auf 10^{-13} erhöht werden. Um diese Genauigkeit zu erreichen, sind eine Vielzahl von Problemen zu lösen. Um den Einfluß des Gradienten des Gravitationsfeldes zu unterdrücken, wurde eine konzentrische Anordnung der Testkörper gewählt und die Form der Testkörper speziell angepaßt. Die hohe Genauigkeit bei der Messung der Relativbewegung kann nur erreicht werden, wenn man ein gleichzeitig mit den Testkörpern mitfallendes Meßsystem verwendet und gewährleistet, daß die Relativbewegungen der Komponenten gering ist. Die notwendigen Bedingungen einer langen Fallstrecke bei geringer Restbeschleunigung des Meß-

aufbaus läßt sich auf der Erde nur in einem Fallturm gewährleisten. Da bei der Untersuchung des SÄP geringe Unterschiede in der Anziehungskraft gemessen werden sollen, muß die Kraft, die der Positionsdetektor auf die Testkörper ausübt gering und möglichst genau bekannt sein. Daneben gibt es eine Reihe technischer Probleme zu lösen, die sich aus der Präzisionsmeßtechnik, der Kryotechnik und den extremen Bedingungen bei den Fallversuchen (Vibrationen bei der Freigabe, Schwerelosigkeit, Schock beim Abbremsen am Ende des Falls) ergeben.

Die vorliegende Arbeit, die Bestandteil des Projektes ist, konzentriert sich dabei auf eine Reihe ausgewählter theoretischer Probleme des Aufbaus des Meßsystems sowie der Durchführung und Auswertung der Experimente. Die praktische Realisierung des Meßsystems und die Ergebnisse der Fallexperimente sind Gegenstand einer anderen Dissertation, die sich in Vorbereitung befindet [9]. Die Ergebnisse der Untersuchungen wurden bereits teilweise bei der Konstruktion des derzeitigen Meßsystems berücksichtigt. Sie betreffen jedoch in vielen Fällen Probleme, die erst ab einer bestimmten Meßgenauigkeit berücksichtigt werden müssen. Diese Genauigkeit wird bei den derzeitigen Experimenten jedoch noch nicht erreicht.

Ziel der Arbeit ist die theoretische Untersuchung einzelner Komponenten des Meßsystems, insbesondere verschiedener Detektorschaltungen, und ihres Einflusses auf das Ergebnis des Experiments. Neben der Optimierung der Detektoren hinsichtlich großer Auflösung, geringer Rückwirkung auf die Testkörper und hoher Linearität soll ermittelt werden, ob die angestrebte Genauigkeit realisierbar ist. Dazu soll ein geeignetes Auswerteverfahren für die späteren Meßwerte erstellt und das erzielbare Auflösungsvermögen auf der Basis bisheriger Laborexperimente abgeschätzt werden. Da der Detektor seine optimale Leistungsfähigkeit nur über einen beschränkte Positionsbereich erreicht, wird weiterhin ein Verfahren erarbeitet, um die Testkörper vor der Messung präzise abzubremsen und zu positionieren. Die Arbeit gliedert sich dabei folgendermaßen:

Kapitel 2 behandelt die Grundlagen, wie die Supraleitung oder das SÄP, und stellt das eingesetzte Meßsystem kurz vor.

Das Kapitel 3 diskutiert Vor- und Nachteile verschiedener Positionsdetektoren, insbesondere die Empfindlichkeit und die Rückwirkung auf die Testkörper.

Im Kapitel 4 werden verschiedene Spule-Testkörper-Geometrien untersucht, die im Positionsdetektor und bei der Positionierung der Körper verwendet werden können.

Kapitel 5 untersucht den Einfluß der Form des Körpers auf seine Beschleunigung in einem inhomogenen Gravitationsfeld und erläutert die Optimierung der Testkörperform im aktuellen Meßsystem.

Kapitel 6 behandelt ein Verfahren zur schnellen Positionierung der Testkörper. Außerdem wird das Problem der horizontalen Stabilisierung diskutiert.

Im Kapitel 7 wird ein Verfahren zur Auswertung der späteren Meßdaten hergeleitet. Für dieses Verfahrens wird der Einfluß des Detektorrauschens diskutiert und die Auflösungsgrenze des Experiments abgeschätzt.

Im Kapitel 8 werden einige weitere Probleme diskutiert, die sich negativ auf das erreichbare Auflösungsvermögen auswirken, sich jedoch nur schwer quantitativ erfassen lassen.

Kapitel 9 gibt eine Zusammenfassung und Einordnung der wichtigsten Ergebnisse dieser Arbeit.

Grundlagen

2.1 Das schwache Äquivalenzprinzip

Ausgangspunkt für die Entwicklung der ART waren die Ergebnisse experimenteller Untersuchungen der Beschleunigung von Körpern im Gravitationsfeld [10]. Diese Erkenntnisse verallgemeinerte Einstein in Form des Äquivalenzprinzips auch auf andere physikalische Prozesse [11, 12]. Dieses Äquivalenzprinzip besagt, daß es in einem abgeschlossenen Laboratorium, welches sich beschleunigt in einem homogenen Gravitationsfeld bewegt, kein Experiment gibt, das es erlaubt, zwischen den Auswirkungen des externen Gravitationsfeldes und den Folgen der Beschleunigung des Laboratoriums zu unterscheiden. Aus dem Äquivalenzprinzip folgt damit auch, daß zwei Körper unterschiedlicher Masse und Zusammensetzung in einem homogenen Gravitationsfeld die gleiche Gravitationsbeschleunigung erfahren, also die sogenannte Universalität des Freien Falls. Diese Beschränkung des Äquivalenzprinzips auf Probleme der Mechanik wird als schwaches Äquivalenzprinzip bezeichnet. Das SÄP ist nicht nur Grundlage sondern auch einer der wichtigsten Prüfsteine für die Gültigkeit der ART [13]. Darüber hinaus müssen sich auch die neu entwickelten Gravitationstheorien an den experimentellen Untersuchungen zu diesem Prinzip messen [14].

Im Zusammenhang mit den Untersuchungen zur Universalität des freien Falls tritt häufig auch der Begriff der *fünften Kraft* auf [15]. Da die ART bei allen bisherigen Experimenten bestätigt wurde, kann eine mögliche Abweichung zwischen den Fallbeschleunigungen zweier Körper auch daher rühren, daß zwar das Äquivalenzprinzip gilt, jedoch eine zusätzliche Wechselwirkung auf die Testkörper wirkt, die sich nicht mit Hilfe der bisher bekannten 4 Grundwechselwirkungen erklären läßt (siehe z.B. [16]). Sollte diese Kraft durch den Austausch von massebehafteten virtuellen Teilchen vermittelt werden, so bestimmt die Masse dieser Teilchen die Reichweite der Wechselwirkung. Es ist daher notwendig, das Äquivalenzprinzip für verschiedene Abstandsbereiche zu untersuchen.

Bei der Überprüfung der Universalität des freien Falls kann man verschiedene Experimenttypen unterscheiden, z.B. Fallexperimente, Pendelexperimente, Experimente mit Torsionswaagen und Tests mit Elementarteilchen [17]. Die ersten systematischen Untersuchungen zu diesem Problem stammen von Galilei. Dieser beschrieb in einem seiner Bücher ein Experiment am schiefen Turm in Pisa, bei dem zwei Kugeln aus unterschiedlichen Materialien gleichzeitig fallen gelassen wurden und man überprüfte, ob sie gleichzeitig auf dem Boden auftrafen. Dieser Experimenttyp wird daher auch als Galileityp bezeichnet. Dieses Experiment, sofern es tatsächlich durchgeführt wurde, liefert aufgrund der Luftreibung nur eine sehr ungenaue Überprüfung. Die Überprüfung des SÄP, wurde in den folgenden Jahrhunderten mit Hilfe von Pendelexperimenten durch Newton und Bessel weiter verbessert.

Eine fundamentale Verbesserung der Genauigkeit auf $5 \cdot 10^{-9}$ wurde von Eötvös durch den Einsatz einer Torsionswaage erzielt (zur Definition der Genauigkeit siehe Kap. 2.1.1). Bei

diesem Experiment wurde die horizontale Komponente der Gravitationskraft gegen die Zentrifugalbeschleunigung durch die Erddrehung ausbalanciert und für zwei verschiedene Ausrichtungen der Drehwaage untersucht. Auch die derzeit genauesten Experimente zum SÄP [18, 19], basieren auf einer Drehwaage und erreichten eine Genauigkeit von 10^{-12} . Das Experiment beruht auf der Anziehung der Testkörper durch die Sonne. Da durch die Erddrehung und die damit verbundene Änderung der Ausrichtung zur Sonne ein periodisches Erregungssignal erzeugt würde, können trotz der geringen Anziehungskraft selbst kleine Abweichungen vom SÄP vom Rauschen unterschieden werden. Neben den Experimenten mit Torsionswaagen (siehe auch [20]) wurden jedoch auch weiterhin vereinzelt Freifallexperimente durchgeführt [21, 22], auch wenn diese nicht die Auflösung der Torsionswaagenexperimente erreichten. Die erdgebundenen Experimente mit Torsionswaagen scheinen jedoch kaum noch Aussichten auf Verbesserungen zu bieten, da die Auflösung nicht mehr durch die eingesetzten Meßinstrumente sondern durch das seismische Rauschen der Umgebung bestimmt wird.

Die Gültigkeit der ART läßt sich auch mit Hilfe der Abstandsdaten zwischen Mond und Erde überprüfen (Lunar-Laser-Ranging), wobei bisher eine Übereinstimmung der Fallbeschleunigung von Mond und Erde in Richtung Sonne von 10^{-13} ermittelt wurde [23, 24]. Man ist jedoch dabei auf die Materialien der Erde (vorwiegend Eisen im Kern der Erde) und des Mondes (Siliziumverbindungen) beschränkt, d.h. bei anderen Materialkombinationen wären Abweichungen nicht auszuschließen.

Bereits seit Anfang der 70-er Jahre wird ein weiteres Projekt zum Test des Äquivalenzprinzips diskutiert, das sich derzeit in der Phase der Vorbereitung befindet. Bei diesem Experiment soll das Verhalten von Anordnungen aus jeweils 2 konzentrischen Massen unterschiedlichen Materials während des Umlaufs eines Satelliten untersucht werden. Dieses Projekt ist unter dem Namen Satellite Test of the Equivalence Principle (STEP) bekannt. Da sich die Orientierung des Satelliten zur Erde während des Umlaufs ändert, hat man auch hier im Falle der Verletzung des Äquivalenzprinzips ein periodisches Erregersignal. Jedoch entfällt beim Satellitenexperiment das Problem des seismischen Rauschens. Außerdem besteht die Möglichkeit, die Erregerfrequenz durch eine zusätzliche Rotation des Satelliten zu verändern und somit eine Unterscheidung des Meßsignals von periodischen Störungen mit fester Frequenz zu treffen.

Für die Messung der Position der Körper sollen wie bei unserem Experiment SQUID-basierte Positionsdetektoren zum Einsatz kommen. Auf Grund der längeren Meßzeit wird eine deutlich höhere Genauigkeit bei der Überprüfung des SÄP von 10^{-17} bis 10^{-18} angestrebt. Um diese Genauigkeit zu erreichen, müssen allerdings eine deutlich größere Zahl von systematischen Fehlern berücksichtigt bzw. besser unterdrückt werden.

Eine Vielzahl von Problemen, die beim STEP-Projekt auftreten [25–27], müssen auch im Rahmen der Fallturmexperimente untersucht und gelöst werden. Obwohl also unsere Experimente die vom STEP-Projekt angestrebte Genauigkeit wegen der kurzen Fallzeit und der mit den Abwürfen verbundenen Probleme nicht erreichen können, bilden sie zumindest einen Vorlauf für die Experimente des STEP-Projektes. Außerdem erlauben die Experimente am Fallturm eine beliebig häufige Wiederholung der Experimente und einen Austausch bestimmter Komponenten (andere Materialkombinationen der Testmassen) sowie die schrittweise Verbes-

serung des Systems beim Auftreten von Problemen, während die STEP-Mission beim ersten Versuch mit den zuvor gewählten Testmassen funktionieren muß. Es besteht daher ein reger Erfahrungsaustausch zwischen den am STEP-Projekt beteiligten Gruppen und unserer Arbeitsgruppe, die zu einer Aufnahme unserer Gruppe in das STEP-Hardwareteam führte. Neben STEP gibt es auch eine Reihe weiterer Weltraumprojekte zum Test des SÄP [28].

2.1.1 Eötvöskoeffizient

In der klassischen Physik sind mit dem Begriff der Masse verschiedene Eigenschaften verbunden. Zum einen ist die Masse die Eigenschaft eines Körpers, einer Beschleunigung einen Widerstand entgegenzusetzen. Diese Masse m_t , die auch *träge Masse* genannt wird, ist der Proportionalitätsfaktor zwischen der aufgewendeten Kraft \mathbf{F} und der erzielten Beschleunigung \mathbf{a} im Newtonschen Trägheitsgesetz $\mathbf{F} = m_t \cdot \mathbf{a}$. Andererseits bestimmt die Masse die Stärke der gravitativen Wechselwirkung zwischen zwei Körpern (*schwere Masse*). Gelegentlich wird dabei noch zwischen der *aktiven schweren Masse*, die ein Gravitationspotential erzeugt, und der *passiven schweren Masse*, die im Gravitationspotential einer anderen Masse angezogen wird, unterschieden. Streng genommen, sind also träge Masse und schwere Masse in der klassischen Mechanik völlig verschiedene Größen. Alle bisherigen Experimente haben jedoch gezeigt, daß die drei Massen proportional sind, d.h. sind die trägen Massen zweier Körper gleich, so stimmen auch die beiden aktiven schweren Massen bzw. die passiven schweren Massen der beiden Körper überein. Üblicherweise verwendet man daher die gleiche Einheit und den Proportionalitätsfaktor 1.

Um die Genauigkeit unterschiedlicher Experimente zur Überprüfung des schwachen Äquivalenzprinzips vergleichen zu können, verwendet man als Maß für eine mögliche Verletzung dieser Proportionalität den sogenannten Eötvöskoeffizienten:

$$\eta(A, B) = 2 \frac{\left(\frac{m_s}{m_t}\right)_A - \left(\frac{m_s}{m_t}\right)_B}{\left(\frac{m_s}{m_t}\right)_A + \left(\frac{m_s}{m_t}\right)_B}, \quad (2.1)$$

wobei m_s und m_t die schweren und trägen Massen zweier Testkörper A und B sind. Da das SÄP besagt, daß träge und schwere Masse gleich sind, wäre bei Gültigkeit dieses Prinzips für alle Materialkombinationen $\eta = 0$.

Berücksichtigt man die übliche Konvention $m_s/m_t \approx 1$, die aufgrund der bisherigen Experimente mit hoher Genauigkeit gilt, so kann man folgende vereinfachte Definition wählen:

$$\eta(A, B) \approx \left(\frac{m_s}{m_t}\right)_A - \left(\frac{m_s}{m_t}\right)_B. \quad (2.2)$$

Für die Beschleunigungsdifferenz zweier Körper in einem homogenen Gravitationsfeld mit dem Gradienten des Gravitationspotentials \mathbf{g} gilt damit:

$$\mathbf{a}_A - \mathbf{a}_B = \mathbf{g} \cdot \left(\frac{m_s}{m_t}\right)_A - \mathbf{g} \cdot \left(\frac{m_s}{m_t}\right)_B = \eta(A, B) \frac{1}{2} (\mathbf{a}_A + \mathbf{a}_B) \approx \eta(A, B) \mathbf{g}. \quad (2.3)$$

2.2 Gravitation

Bereits Newton ermittelte, daß für die Kraft zwischen zwei punktförmigen Körpern mit den Massen m_1 und m_2 und dem Abstandsvektor \mathbf{r} gilt:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -G_g \cdot \frac{m_1 m_2 \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} . \quad (2.4)$$

Dabei ist G_g die Gravitationskonstante. Diese Beziehung gilt auch für die Anziehung zweier getrennter kugelsymmetrischer Massen (sofern sie nicht ineinander geschachtelt sind) und kann für andere Körper verwendet werden, wenn ihr Abstand hinreichend groß im Vergleich zu ihrer Ausdehnung ist.

Die Beziehungen für die Gravitation ähneln stark den Beziehungen aus dem Elektromagnetismus insbesondere aus der Elektrostatik. Da die Wechselwirkungen jedoch stets anziehend ist, gibt es keine Möglichkeit, die gravitativen Wechselwirkungen abzuschirmen. Dies ist ein Problem, unter dem viele Gravitationsversuche leiden.

Will man die Gravitation zwischen ausgedehnten Masseverteilungen bestimmen, so genügt die in (2.4) gegebene Beziehung nicht. Um solche Probleme zu untersuchen, führt man analog zur Elektrodynamik das sogenannte Gravitationspotential U_G ein. Dieses hängt mit der Dichte (der aktiven schweren Masse) ρ über die Poissongleichung zusammen:

$$\Delta U_G(\mathbf{r}) = 4\pi G_g \rho(\mathbf{r}) . \quad (2.5)$$

Dabei ist Δ der Laplace Operator. Das Gravitationspotential eines Körpers K läßt sich allerdings auch in der Integralschreibweise darstellen:

$$U_G(\mathbf{r}) = -G_g \int_K \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' . \quad (2.6)$$

Man kann auch eine Feldstärke \mathbf{g} des Gravitationsfeldes definieren, die die Dimension einer Beschleunigung hat:

$$\mathbf{g} = -\text{grad } U_G . \quad (2.7)$$

Sind schwere und träge Masse gleich, so ist $\mathbf{g}(\mathbf{r})$ die Fallbeschleunigung einer kleinen Testmasse an dem jeweiligen Ort.

Für die Energie E einer ausgedehnten Masseverteilung K mit der Dichteverteilung (der passiven schweren Masse) $\rho(\mathbf{r})$ im Feld eines ortsfesten anderen Körpers gilt :

$$E = \int_K \rho(\mathbf{r}') U(r') dV' . \quad (2.8)$$

Die Dichteverteilung $\rho(\mathbf{r})$ hängt natürlich von der Lage, bei deformierbaren Körpern auch von der Form des angezogenen Körpers ab. Für einen starren Körper gilt dabei:

$$\rho(\mathbf{r}) = \rho_0(\mathbf{r}_0 + \Delta\mathbf{r}) , \quad (2.9)$$

wobei ρ_0 die Dichteverteilung bezüglich eines mit dem Körper verbundenen Koordinatensystems und $\Delta\mathbf{r}$ die Verschiebung des Ursprungs dieses Koordinatensystems bezüglich des Koordinatensystems des ortsfesten Feldes sind. Außer von der Position kann die Energie des

Körper auch von dessen Rotationsfreiheitsgraden abhängen. Betrachtet man einen Körper in einem Gravitationsfeld mit der Fallbeschleunigung $\mathbf{g}(\mathbf{r})$, so gilt für die Kraft:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \int_K \mathbf{g}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \rho_0(\mathbf{r}') dV' . \quad (2.10)$$

Für das Drehmoment \mathbf{M} , bezogen auf den Schwerpunkt des Körpers, gilt:

$$\mathbf{M} = \int_K \rho_0(\mathbf{r}') \mathbf{g}(\mathbf{r} + \mathbf{r}') \times \mathbf{r}' dV' . \quad (2.11)$$

2.2.1 Linear abnehmende Fallbeschleunigung

In einem homogenen Gravitationsfeld wirkt auf den angezogenen Körper nur eine Kraft in Richtung des Gradienten des Gravitationspotentials, jedoch keinerlei Drehmoment. Die Fallbeschleunigung des Körpers ist identisch mit dem konstanten Gradienten des Gravitationspotentials.

Zerlegt man den Betrag der Fallbeschleunigung g , den eine Kugel mit der Masse m erzeugt, im Abstand r in eine Taylorreihe, so folgt:

$$g(r + \Delta x) = \frac{G_g m}{(r + \Delta r)^2} = g(r) - \frac{2g(r)}{r} \Delta r + \frac{3g(r)}{r^2} \Delta r^2 - \dots . \quad (2.12)$$

Betrachtet man die Erde als kugelsymmetrische Masseverteilung, so erhält man für Experimente in der Nähe der Oberfläche ($r \approx 6370 \text{ km}$) einen Gradienten der Fallbeschleunigung von $dg/dr \approx -3 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-2}$. Dagegen können die höheren Ableitungen für Experimente mit $\Delta r < 1 \text{ m}$ vernachlässigt werden. Dies gilt auch bei Untersuchungen der Differenzbeschleunigung, bei denen die Schwerpunkte der Körper, wie in unserem Meßsystem, nur um maximal 0,5 mm auseinanderliegen können.

In diesem Abschnitt soll daher untersucht werden, wie sich ein Körper in einem Gravitationspotential verhält, dessen Fallbeschleunigung linear von der Position abhängt:

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \mathbf{g}(0) + \tilde{\mathbf{g}}\mathbf{r} , \quad (2.13)$$

wobei $\mathbf{g}(0)$ die Fallbeschleunigung im Koordinatenursprung und $\tilde{\mathbf{g}}$ der konstante Gradient des Kraftfeldes ist. Für die Fallbeschleunigung einer Masseverteilung $\rho(\mathbf{r})$ gilt damit:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{1}{m} \int \mathbf{g}(\mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{m} \left(\int \mathbf{g}(0) \rho(\mathbf{r}) dV + \int \tilde{\mathbf{g}} \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV \right) \\ &= \frac{1}{m} \mathbf{g}(0) \int \rho(\mathbf{r}) dV + \frac{\tilde{\mathbf{g}}}{m} \int \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}) dV . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Das erste Integral entspricht der Masse, während das zweite Integral dem Produkt aus Schwerpunkt \mathbf{r}_s und der Masse entspricht. Damit ist

$$\mathbf{a} = \mathbf{g}(0) + \tilde{\mathbf{g}}\mathbf{r}_s . \quad (2.15)$$

Die Beschleunigung der Masseverteilung entspricht also der Fallbeschleunigung am Ort des Schwerpunktes.

Zusätzlich zur Beschleunigung kann jedoch auch ein Drehmoment auftreten. Dieses Drehmoment hängt von der Form des Körpers und dessen Orientierung bezüglich des Gradienten der Fallbeschleunigung ab. Für kugelsymmetrische Körper verschwindet das Drehmoment, für langgestreckte Masseverteilungen ist es besonders groß. Daher soll der Effekt am Beispiel zweier verbundener gleicher Punktmassen mit der Masse $m/2$ und dem Abstand $2l$ kurz diskutiert werden. Dazu wählt man ein mit dem Schwerpunkt mitfallendes Bezugssystem. Im frei fallenden Bezugssystem spüren die Körper nur noch den Gradienten der Fallbeschleunigung. Für die Kräfte auf die Punktmassen gilt daher:

$$|F| = \tilde{g}l \frac{m}{2} \cdot \cos \vartheta \quad , \quad (2.16)$$

wobei \tilde{g} der Betrag des Gradienten der Fallbeschleunigung und ϑ der Winkel zwischen der Verbindungslinie der beiden Punktmassen und der Richtung des Gradienten der Fallbeschleunigung ist. Die beiden Kräfte verursachen ein Drehmoment:

$$M = -2|F|l \sin \vartheta = -l^2 m \tilde{g} \cos \vartheta \cdot \sin \vartheta = -\frac{1}{2} \tilde{g} m l^2 \sin(2\vartheta) \quad . \quad (2.17)$$

Das System besitzt 4 Gleichgewichtslagen, zwei äquivalente stabile bei $\vartheta = 0$ bzw. $\vartheta = \pi$ und zwei äquivalente instabile bei $\vartheta = \pi/2$ bzw. $\vartheta = 3/2 \pi$. Die Gleichung ähnelt der Beziehung für ein Fadenpendel. Für kleine Auslenkungen aus der stabilen Gleichgewichtslage erhält man:

$$\ddot{\vartheta} = \frac{M}{J} = -\frac{1}{2} \frac{l^2 m \tilde{g} \sin(2\vartheta)}{m l^2} \approx -\tilde{g} \cdot \vartheta \quad . \quad (2.18)$$

Dabei ist J das Trägheitsmoment des Körpers bei Drehung um den Schwerpunkt. Man erhält also eine Schwingungsgleichung mit der Kreisfrequenz $\omega^2 \approx \tilde{g}$, die nur vom Gradienten der Fallbeschleunigung, jedoch nicht vom Abstand der Massen, abhängt. Daher gilt diese Eigenfrequenz auch für langgestreckte gerade Stäbe. In der Nähe der Erdoberfläche ergibt sich eine Frequenz von $\omega \approx 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$. Für 2 oder gar 3-dimensionale Masseverteilungen ergeben sich dagegen kleinere Eigenfrequenzen.

2.3 Supraleitung

Im Jahre 1911 entdeckte H. Kamerlingh-Onnes, daß bei bestimmten Materialien unterhalb der sogenannten kritischen Temperatur (Sprungtemperatur) T_c der Gleichstromwiderstand sprunghaft auf einen nicht mehr experimentell nachweisbaren Wert abfällt [29]. Dieses Phänomen wurde Supraleitung genannt.

Das Material, der sogenannte Supraleiter, geht beim Unterschreiten der kritischen Temperatur in einen anderen thermodynamischen Zustand über, der nicht nur durch das Verschwinden des Widerstandes, sondern auch durch eine Reihe weiterer Eigenschaften gekennzeichnet ist [30, 31].

2.3.1 Magnetische Eigenschaften

Der supraleitende Zustand steht in enger Wechselwirkung mit einem eventuell vorhandenen äußeren Magnetfeld. Supraleiter verhalten sich bei kleinen externen Feldern wie ideale Diamagneten, d.h. sie verdrängen bis zum Erreichen einer bestimmten Feldstärke das Magnetfeld

vollständig aus ihrem Innern. Die Verdrängung des Magnetfeldes geschieht dabei unabhängig davon, ob das Magnetfeld schon vor dem Übergang in den supraleitenden Zustand vorhanden war, oder ob das Feld erst später zugeschaltet wurde. Dies ist unter dem Namen Meissner-Ochsenfeld-Effekt bekannt [32]. Das Magnetfeld kann nur in einen dünnen Bereich in der Nähe der Oberfläche eindringen. In diesem Bereich fließen die sogenannten Abschirmströme, die das Feld im Innern kompensieren. Die Tiefe des Eindringens wird durch eine material- und temperaturabhängige Abklingkonstante, die Londonsche Eindringtiefe λ_L , bestimmt. Bei 4,2 K liegt sie für Niob und Blei im Bereich von 40–50 nm [33].

Andererseits ist es möglich, mit Hilfe eines starken Magnetfeldes den supraleitenden Zustand wieder zu zerstören. Die Feldstärke, bei der dies geschieht, heißt kritische Feldstärke H_c und hängt von der Temperatur ab. Man unterscheidet zwei Typen von Supraleitern [34]. Homogene Supraleiter I. Art verdrängen bis zum Erreichen der kritischen Feldstärke das Magnetfeld vollständig aus ihrem Innern und werden nach Überschreiten der kritischen Feldstärke vollständig normalleitend.

Bei Supraleitern II. Art ist es ab einer bestimmten Feldstärke H_{c1} energetisch günstiger, das Magnetfeld in Form einzelner Flußwirbel in den Supraleiter eindringen zu lassen. Je größer die Feldstärke wird, desto mehr Wirbel dringen in den Supraleiter ein. Die Wirbel besitzen normalleitende Kerne und ordnen sich in einem energetisch günstigen Muster an. Bei Erreichen einer kritischen Feldstärke H_{c2} liegen dann die Flußwirbel so dicht, daß der supraleitende Zustand vollständig zerstört wird.

Bringt man einen Supraleiter in ein homogenes Magnetfeld, das unterhalb der kritischen Feldstärke liegt, so verformt dieser das externe Feld. Dabei kann die Feldstärke im Bereich von Ecken und Kanten des Supraleiters lokal die kritische Feldstärke überschreiten, so daß Fluß eindringt und sich auch bei Supraleitern I. Art ein gemischter Zustand aus supraleitenden und normalleitenden Bereichen bildet.

Unterhalb der kritischen Feldstärke H_c bzw. H_{c1} ist die vollständige Verdrängung des Flusses aus dem Supraleiter der energetisch günstigste Zustand. Bei inhomogenen oder ungünstig geformten Supraleitern können jedoch auch weitere stabile Verteilungen des Magnetfeldes (Nebenminima der Energie) existieren, bei denen sich einzelne Flußwirbel im Innern des Supraleiters aufhalten. Diese Flußwirbel werden durch eine Energiebarriere (z.B. Pinningzentren) daran gehindert, sich umzuordnen oder den Supraleiter zu verlassen. Bei solchen Supraleitern kann permanenter Fluß eingefroren werden. Durch die thermische Aktivierung der festgehaltenen (gepinnten) Flußwirbel kann bei diesen Supraleitern auch Rauschen auftreten.

Eine andere Möglichkeit, mit Supraleitern ohne ständige Energiezufuhr ein permanentes Magnetfeld aufrecht zu erhalten, ist die Verwendung mehrfach zusammenhängender Supraleiter, wie zum Beispiel supraleitender Ringe oder kurzgeschlossener supraleitender Spulen. Der von einem Supraleiter umschlossene Fluß bleibt wegen der Eindeutigkeit Phase der Wellenfunktion (vergl. Kap. 2.3.3) konstant. Die Flußerhaltung in supraleitenden Kreisen kann daher zum Bau starker Magnete verwendet werden.

Weiterhin läßt sich die Flußerhaltung auch zur Abschirmung externer Felder nutzen. Ist nämlich der eingeschlossene Fluß beim Schließen des supraleitenden Kreises Null, so wird dieser

Wert auch beibehalten, wenn sich das äußere Feld ändert. Man muß die Form des Supraleiters jedoch geeignet wählen, damit nicht nur der Gesamtfluß, sondern auch die Feldstärke am gewünschten Ort (und seiner Umgebung) verschwindet. Besonders geeignet zur Abschirmung sind dabei lange supraleitende Rohre, die möglichst am Ende geschlossen sind.

2.3.2 Elektrische Eigenschaften

Beim Übergang zur Supraleitung bildet ein Teil der Elektronen sogenannte Cooperpaare aus jeweils zwei Elektronen. Diese gehen keine dissipativen Wechselwirkungen mit dem Gitter ein. Damit verschwindet in homogenen Supraleitern der Gleichstromwiderstand. Dies gilt jedoch nur für einen feldfreien Supraleiter. Befinden sich freibewegliche Flußwirbel in dem stromdurchflossenen Supraleiter, wie z.B. in Supraleitern II. Art oberhalb von H_{c1} , so werden diese durch die Lorentzkraft quer zur Stromrichtung beschleunigt. Die Bewegung der Flußschläuche ist jedoch mit dissipativen Ummagnetisierungsprozessen im Supraleiter verbunden, die zu einem, wenn auch geringen, Gleichstromwiderstand führen. Dieser Widerstand ist jedoch in der Regel deutlich kleiner als der Widerstand guter Normalleiter und kann durch zusätzliche Pinningzentren im Supraleiter unterdrückt werden.

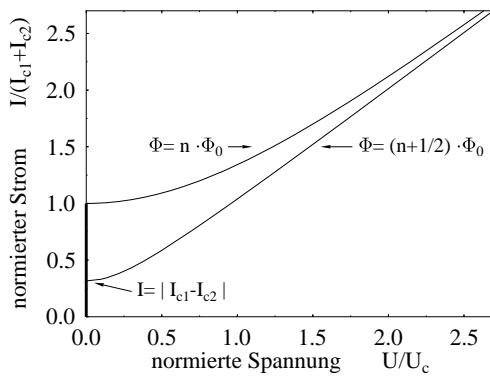
Auch ein Wechselstrom kann zu dissipativen Vorgängen im Supraleiter führen. Aufgrund der geometrischen Induktivität des Leiters und der Trägheit der Ladungsträger führt eine Änderung des Stromes zur Induktion einer Spannung. Aufgrund dieser Spannung beteiligen sich nicht nur die Ladungsträger der Supraleitung (Cooperpaare) am Stromtransport, sondern auch freie Elektronen, die mit dem Gitter dissipativ wechselwirken. Bei den in unserem Experiment auftretenden Frequenzen kann dieser Widerstand jedoch ebenfalls vernachlässigt werden.

2.3.3 Quantenmechanische Eigenschaften

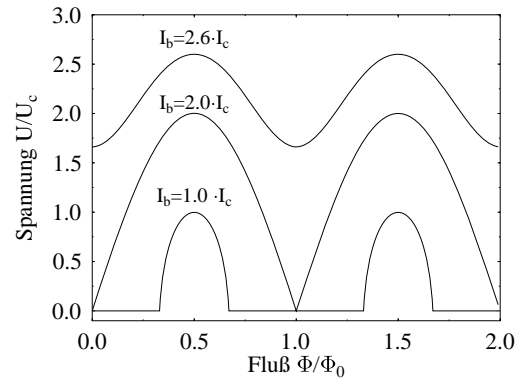
Die Supraleitung ist mit einer Reihe von Quanteneffekten verbunden. So befinden sich innerhalb eines homogenen Supraleiters die Träger der Supraleitung, die Cooperpaare, in einem einheitlichen Quantenzustand. Die eichinvariante Phase innerhalb des Supraleiters hängt vom externen magnetischen Feld ab. Für die Phasendifferenz zwischen zwei Punkten gilt dabei:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\Phi_0} \cdot \int \mathbf{A} d\mathbf{r} , \quad (2.19)$$

wobei \mathbf{A} das Vektorpotential des magnetischen Feldes ist. In einem geschlossenen supraleitenden Ring führt dies dazu, daß der Fluß im Gleichgewichtszustand stets ein Vielfaches des Flußquanten $\Phi_0 = h_p/2e \approx 2,07 \cdot 10^{-15} \text{Wb}$ ist. Dabei ist e die Elementarladung und h_p die Plancksche Konstante. Ist der Ring dagegen durch eine dünne Barriere unterbrochen, so können auch andere Werte für den umschlossenen Fluß auftreten. Dabei bestimmt dieser Fluß die Phasendifferenz über der Barriere. Entsprechend des Josephsoneffektes, der 1962 von B. D. Josephson vorausgesagt wurde [35], gibt es jedoch einen periodischen Zusammenhang zwischen der Phasendifferenz $\Delta\phi$ über der Barriere und dem Tunnelstrom der Cooperpaare I_s . Damit bestimmt der umschlossene Fluß die elektrischen Eigenschaften des Ringes. Dies kann zur Messung kleiner Magnetfelder genutzt werden (siehe nächstes Kapitel).



(a) U - I Kennlinie des SQUIDs für verschiedene Flüsse im SQUID-Ring



(b) U - Φ Kennlinie für verschiedene Biasströme I_b (I_c - kritischer Strom des einzelnen Kontaktes)

Abbildung 2.1: Kennlinien des DC-SQUIDs (Φ - externer Fluß)

Die schwach gekoppelten Verbindungen zwischen zwei Supraleitern werden auch als Josephsonkontakte bezeichnet. Im einfachsten Fall lautet die Beziehung zwischen supraleitendem Tunnelstrom und Phasendifferenz $I_s = I_c \sin \Delta\phi$ (Gleichstrom-Josephson-Gleichung). Der Parameter I_c , der auch als kritischer Strom des Kontaktes bezeichnet wird, bestimmt dabei wieviel Strom über den Kontakt fließen kann, ohne daß eine Spannung abfällt.

2.4 SQUID

SQUIDs (Superconducting Quantum Interference Device) sind die derzeit empfindlichsten Detektoren für Magnetfelder und gehören zu den Sensoren mit der besten Energieauflösung überhaupt. Sie können überall dort eingesetzt werden, wo es gelingt, physikalische Größen in ein Magnetfeld oder einen Strom umzuwandeln. Ein Vorteil von SQUIDs ist die Möglichkeit, statische oder sehr niederfrequente Felder zu messen.

Ein SQUID besteht aus einem supraleitenden Ring, der durch einen oder mehrerer Josephsonkontakte unterbrochen ist. Die Gesamtsumme der Phasen im diesem Ring muß ein Vielfaches von 2π sein. Diese Gesamtsumme setzt sich aus der Phasenverschiebung der eichinvarianten Phase im Supraleiter aufgrund des umschlossenen Flusses (siehe Gl. 2.19) und den Phasendifferenzen über den einzelnen Josephsonkontakten zusammen. Der umschlossene Fluß bestimmt also die Phasendifferenz über den Josephsonkontakten und damit den supraleitenden Tunnelstrom durch die Kontakte. Aus Sicht des Anwenders ist ein SQUID also ein Bauelement, daß in Abhängigkeit vom umschlossenen Fluß seine elektrischen Eigenschaften ändert.

Es werden im wesentlichen zwei Typen von SQUIDs verwendet, nämlich die RF-SQUIDs mit einem Josephsonkontakt und die DC-SQUIDs mit zwei Josephsonkontakten. Bei unseren Experimenten kommen sogenannte DC-SQUIDs zum Einsatz. Diese bestehen aus zwei Josephsonkontakten mit möglichst identischen Parametern, die durch einen supraleitenden Ring miteinander verbunden sind. Dadurch hängen die Phasendifferenzen der beiden Josephsonkontakte voneinander und vom Fluß im SQUID-Ring ab. In Abhängigkeit vom Fluß im SQUID

ändert sich damit die I-U-Kennlinie des SQUIDs (siehe Abb. 2.1(a))¹. Das DC-SQUID wird mit einem Gleichstrom I_b betrieben, der möglichst konstant gehalten wird. Als Signal wird dann die Spannung U über dem SQUID gemessen. Ändert sich der Fluß Φ im SQUID, so ändert sich auch die Form der I-U Kennlinie und damit die zum Strom I_b gehörende Spannung $U(\Phi, I_b)$. Bei wachsendem Fluß erhält man eine periodische Spannung mit der Periode eines Flußquants Φ_0 . In Abbildung 2.1(b) ist die Kennlinie U - Φ eines solchen SQUIDs für verschiedene Biasströme I_b dargestellt. Das SQUID wird im allgemeinen mit einem Strom kurz oberhalb des kritischen Stromes des SQUIDs (Summe der kritischen Ströme der einzelnen Kontakte) betrieben, da dort der maximale Spannungshub in der U - Φ Kennlinie zu erwarten ist. Da der Spannungshub relativ klein und die Kennlinie stark nichtlinear ist, bringt eine direkte Messung der Ausgangsspannung nur unbefriedigende Ergebnisse. Daher wird eine spezielle Ansteuerelektronik verwendet, die in Kapitel 3.7 beschrieben und näher untersucht wird.

2.5 Meßsystem

In diesem Kapitel soll kurz das bei den Fallexperimenten verwendete Meßsystem beschrieben werden. Wie bereits erwähnt, beruht das Experiment auf der Messung der Relativbeschleunigung zweier Körper während des Falls. Um die erforderliche Genauigkeit zu erzielen, sollte die Relativbewegung der Körper zum umgebenden Meßsystem möglichst klein sein. Daher werden die Experimente am Fallturm des Zentrums für angewandte Raumfahrttechnologie und Mikrogravitation (ZARM) der Universität Bremen durchgeführt, der innerhalb einer evakuierten Fallröhre (Restdruck ca. 10 Pa) eine Fallstrecke von 109 m bietet [36,37]. Innerhalb der speziellen Fallkapseln herrscht für eine Zeit von ca. 4,7 s nahezu Schwerelosigkeit (Restbeschleunigung ca. 10^{-5} – $10^{-6} g_0$, $g_0 \approx 9,81 \text{ m/s}^{-2}$ - Fallbeschleunigung in der Nähe der Erdoberfläche). Am Ende der Fallröhre befindet sich ein Auffangbehälter, der die Fallkapseln mit einer maximalen Beschleunigung von $50 g_0$ abbremst, so daß der Experimentalaufbau den Abwurf in der Regel unbeschadet übersteht.

Die Restbeschleunigung der Fallkapsel ist für unser Experiment jedoch noch zu hoch, da eine Restbeschleunigung von $10^{-5} g_0$ bei einer Fallstrecke von 100 m bedeutet, daß sich das Meßsystem ca. 1 mm gegenüber den freifallenden Testkörpern verschieben würde. Um die Restbeschleunigung weiter zu verringern, kommt innerhalb der Fallkapsel ein vom ZARM entwickelter sogenannter Freeflyer zum Einsatz. Dieser wird während des Falls von der Kapsel, die durch das Restgas in der Fallröhre gebremst wird, entkoppelt. Da sich dieser Freeflyer nur um wenige Millimeter gegen die umgebende Kapsel verschiebt kann man bei ihm die Gasreibung praktisch vernachlässigen, so daß eine Restbeschleunigung von $10^{-8} g_0$ angestrebt wird. Innerhalb des Freeflyers ist unser Versuchsaufbau integriert (Gesamtgewicht inklusive Meßaufbau ca. 220 kg).

¹Schickt man einen Gleichstrom durch das SQUID, so tritt neben der Gleichspannungskomponente, die in Abb. 2.1(a) dargestellt ist, auch eine hochfrequente Wechselspannung (Wechselstrom-Josephson-Effekt) auf. Jedoch ist die Frequenz dieser Spannung so hoch, daß sie in den meisten Experimenten nicht nachgewiesen werden kann.

Die größte Komponente stellt dabei der Helium-Kryostat dar, der das eigentliche Meßsystem auf einer Temperatur von 4,2 K hält, wie es für den stabilen Betrieb der SQUIDs und die Supraleitung der Testkörper und Spulen erforderlich ist. Mit einer Füllmenge von ca. 20 l flüssigem Helium reicht die Standzeit aus, um das Meßsystem zwischen den Abwürfen und über Nacht unterhalb der kritischen Temperatur zu halten, so daß man bei den Abwürfen einer Abwurfserie reproduzierbare eingefrorene Flußverteilungen im System erwarten dürfte. Die Abwürfe haben jedoch gezeigt, daß sich der eingefrorene Fluß im Detektor vor und nach dem Abwurf unterscheiden.

Innerhalb des Kryostaten befindet sich das eigentliche Meßsystem (siehe Abb. 2.2) in einer evakuierten Kammer². Die beiden konzentrischen Testkörper (a) und (b) sollten aus möglichst unterschiedlichen Materialien bestehen und müssen aber andererseits bei 4,2 K supraleitend oder mit einem entsprechenden Supraleiter beschichtet sein. Daher besteht der innere Körper aus einer speziellen Bleilegierung (Supraleiter), während der äußere Körper aus Aluminium (erst unterhalb der Arbeitstemperatur supraleitend) besteht und mit dem Supraleiter Niob beschichtet wurde. Die Form der beiden Testkörper wurde speziell angepaßt (siehe Kap. 5). Zu jedem Körper gehören je eine sogenannte Levitationsspule ober- und unterhalb des Körpers (i) bzw. (f), um den Körper magnetisch in der Mitte des Systems zu positionieren (siehe Kap. 6.1), und eine Mäanderspule (c) bzw. (d), um den Körper radial zu zentrieren (siehe Kap. 6.2). Weiterhin befinden sich oberhalb und unterhalb der Kanten der Körper die Detektorspulen (g) bzw. (h), die dazu dienen, die Position des Körpers zu messen (siehe Kap. 3). Die Systeme sind untereinander und gegenüber dem Außenfeld durch supraleitenden Schirme (j) getrennt. Um die Funktion der Detektoren auch unter Schwerkraftbedingungen testen zu können, befindet sich im unteren Teil der Anordnung eine pneumatische, mit He-Gas betriebene Hebevorrichtung, die über entsprechende Stangen die Körper anheben kann. Um Wirbelströme zu vermeiden, sollten sämtliche Komponenten des Meßeinsatzes supraleitend beschichtet sein oder aus Nichtleitern bestehen.

Die Positionsdetektoren basieren auf planaren integrierten DC-SQUIDs vom Typ UJ 111, die an der Friedrich-Schiller-Universität entwickelt und gefertigt wurden. Diese SQUIDs sind für den Einsatz in einem breiten Anwendungsbereich optimiert und zeichnen sich durch ein geringes Rauschen und eine gute Unterdrückung externer Störungen aus [39–43]. Zur Ansteuerung der SQUIDs wird eine am Institut für Festkörperphysik entwickelte, modular aufgebaute SQUID-Elektronik verwendet, die speziell an die Erfordernisse der Fallexperimente (ferngesteuerter Betrieb, hohe Schockfestigkeit) angepaßt wurde.

Weiterhin befindet sich innerhalb des Freeflyers ein Rechner zur Aufzeichnung der Signale der einzelnen Sensoren sowie die Stromversorgung (Akkumulatoren und DC-DC-Wandler) für die einzelnen Komponenten des Systems.

Mit dieser Meßanordnung und einer vereinfachten Anordnung mit einem einzelnen Testkör-

²Derzeit befindet sich zur Beseitigung von thermischen Problemen beim Einkühlen und beim Betrieb der thermischen Supraleitungs-Normalleitungs-Schalter 1 mbar He-Restgas im System. Die Wechselwirkung mit diesem Gas (Gasströmungen nach der Freigabe der Kapsel, Widerstand des Gases gegen Verdrängung durch den Körper wegen sehr schmaler Spalte zwischen Körper und Meßsystem, Druckfluktuationen) könnten für die späteren Experimente jedoch zu groß sein.

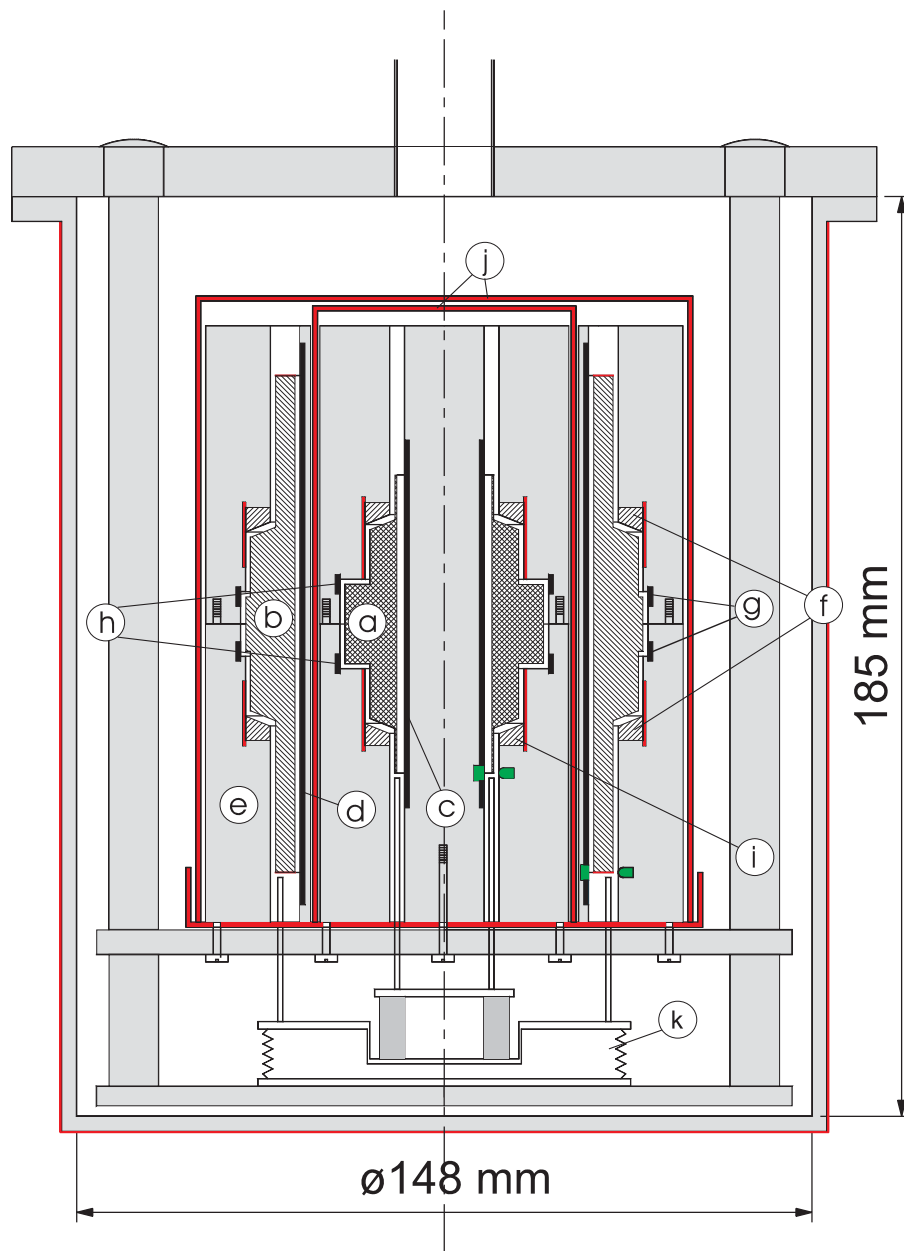


Abbildung 2.2: Vereinfachte Darstellung des Meßsystems [38] (Kryostateneinsatz); Erläuterungen im Text.

per wurde eine Vielzahl von Abwurfexperimenten durchgeführt, deren Ergebnisse Gegenstand einer Reihe von Veröffentlichungen und Konferenzbeiträgen war [44–55]. Dabei traten trotz der großen Vibrationen zu Beginn des Abwurfes und der großen Belastung beim Abbremsen bisher keine mechanischen und kryotechnischen Probleme auf.

Positionsdetektor

3.1 Vorbetrachtungen

Um mit einem Magnetfeldsensor, wie z.B. einem SQUID, die Position eines Körpers zu messen, muß die Verschiebung des Körpers zu einer Flußänderung im Sensor führen. Dazu gibt es unterschiedliche Möglichkeiten:

- Die einfachste Variante ist ein vollständig oder teilweise permanent magnetisiertes Meßobjekt, z.B. ein kleiner Permanentmagnet, der am Testkörper befestigt wird. Durch den Einsatz von Spezialmagneten kann man Felder mit einer hohen Feldstärke und damit einem hohen Feldstärkegradienten erzeugen, der bei einer Verschiebung des Magneten zu einer starken Feldstärkeänderung am Ort des feststehenden Magnetfeldsensors führt. Es genügen damit bereits Hallsensoren oder magnetoresistive Sensoren, um eine Verschiebung des Testkörpers zu detektieren. Daher wird diese Variante häufig bei kommerziell erhältlichen Positionssensoren verwendet.
- Die Magnetisierung des Meßobjekts kann auch durch ein externes Feld (externe Spule, externer Permanentmagnet) erzeugt werden. Um einen möglichst großen Meßeffect zu erreichen, sollte man ferromagnetische oder supraleitende Meßobjekte verwenden. Dabei genügt bereits eine dünne geschlossene supraleitende Schicht (einige hundert Nanometer) auf dem Meßobjekt.

Ferromagnetika, insbesondere solche mit hoher Permeabilität, haben im Vergleich zu Supraleitern häufig den Nachteil eines erhöhten Rauschens (Barkhausen-Sprünge) und der Hysterese. Außerdem können sie unter mechanischer und thermischer Belastung ihre magnetischen Eigenschaften ändern.

Auch dieses Funktionsprinzip ist bei kommerziell erhältlichen Positionssensoren sehr verbreitet. Dabei wird die Erregerspule meist mit einem Wechselfeld betrieben, da sich dieses leichter detektieren läßt.

- Man kann die Magnetisierung des Körpers auch mit der selben Spule erzeugen, mit der man das resultierende Feld mißt. Man benötigt in diesem Fall, wie bei der vorhergehenden Variante, einen magnetisierbaren Körper. Eine Bewegung des Körpers verursacht in diesem Fall eine Änderung der Eigeninduktivität der Detektorspule. Im Falle eines supraleitenden Körpers verringert sich die Induktivität bei Annäherung des Körpers, während sie sich bei einem ferromagnetischen Körper bei Annäherung erhöht. Diese Form des Detektors soll in unserem Experiment zum Einsatz kommen und in den folgenden Kapiteln in verschiedenen Varianten diskutiert werden.

Der Detektor kann durch die Größen Empfindlichkeit und Auflösungsvermögen gekennzeichnet werden. Als Empfindlichkeit wird dabei die Ableitung des Ausgangssignals nach dem

Eingangssignal bezeichnet. Da man das Ausgangssignal weiter verstärken kann, hat die Empfindlichkeit nur untergeordnete Bedeutung. Zur besseren Vergleichbarkeit wird in den folgenden Kapiteln die Ableitung $\frac{dI_i}{dx}$ des Stromes in der SQUID-Eingangsspule I_i nach der Position des Meßobjekts x als Empfindlichkeit bezeichnet.

Als Auflösungsvermögen wird im allgemeinen das kleinste sicher nachweisbare Signal bezeichnet. Wenn das Auflösungsvermögen durch ein breitbandiges Rauschen begrenzt ist, so kann es bei stationären oder periodischen Signalen durch Mittelung verbessert werden. Das absolute Auflösungsvermögen ist dabei proportional zu $1/\sqrt{N}$ (N - Anzahl der Mittelungen) bzw. zu $1/\sqrt{t_m}$ (t_m - Mittelungsdauer, Meßzeit). Daher wird häufig die Wurzel der spektralen Leistungsdichte des Detektorrauschens im Bereich des weißen Rauschens (oder bei bekanntem Signal im Bereich der Signalfrequenz) als sogenanntes rauschbegrenztes Auflösungsvermögen angegeben. Für eine Reihe von Anwendungsgebieten, wie z.B. die Untersuchungen in Kap. 7, wird jedoch der Verlauf des gesamten Rauchspektrums zur Beurteilung des Sensors benötigt. Da das Auflösungsvermögen der Ströme in der SQUID-Eingangsspule δI_i für ein konkretes System aus SQUID und SQUID-Elektronik eine feststehende Konstante ist, ist das rauschbegrenzte Positionsauflösungsvermögen δx umgekehrt proportional zur oben definierten Empfindlichkeit:

$$\delta x = \left(\frac{dI_i}{dx} \right)^{-1} \delta I_i . \quad (3.1)$$

Daher werden die Begriffe häufig synonym verwendet. Zur besseren Vergleichbarkeit verschiedener SQUIDs wird häufig das sogenannte Flußauflösungsvermögen $\delta\Phi$ angegeben, das sich auf die Auflösung des Flusses im Innern des SQUID-Ringes bezieht. Dabei gilt:

$$\delta\Phi = \delta I_i M_{SQ} = \delta I_i k_{SQ} \sqrt{L_i L_{SQ}} , \quad (3.2)$$

wobei M_{SQ} die Gegeninduktivität zwischen SQUID-Eingangsspule und SQUID-Ring ist, die sich aus dem Kopplungskoeffizienten k_{SQ} , der Induktivität des SQUID-Rings L_{SQ} und der Induktivität der SQUID-Eingangsspule L_i ergibt. Das im Meßsystem verwendete SQUID UJ 111 besitzt z.B. eine integrierte Eingangsspule mit der Induktivität $L_i = 0,8 \mu\text{H}$ und einen SQUID-Ring mit der Induktivität $L_{SQ} = 40 \text{ pH}$. Die Koppelkonstante zwischen den beiden Spulen beträgt $k_{SQ} = 0,9$. Das rauschbegrenzte Auflösungsvermögen unterscheidet sich dagegen von SQUID zu SQUID und liegt bei ausgesuchten Exemplaren bei $\delta\Phi = 2 \cdot 10^{-6} \Phi_0/\sqrt{\text{Hz}}$.

Die vorangehenden Betrachtungen beziehen sich jedoch nur auf den Fall, daß die Steuer elektronik direkt auf das SQUID zurückwirkt. Bei den in den Kapiteln 3.5 und 3.6 vorgestellten Detektoren ist eine gesonderte Betrachtung erforderlich.

Die Varianten in den Kapiteln 3.2, 3.3 und 3.4 wurden bereits in anderen Publikationen vorgestellt. Allerdings wurde z.B. die Rückwirkung des Detektors auf die Testkörper nur für spezielle Induktivitätsverläufe (z.B. lineare) untersucht bzw. es wurden nur diese Spezialfälle publiziert. Da wichtige Zwischenergebnisse fehlten bzw. die Lösungswege speziell auf bestimmte Spezialfälle ausgerichtet waren, konnte nicht auf diese Rechnungen aufgebaut werden. Die folgenden Untersuchungen basieren daher auf eigenen Rechnungen und wurden dann durch Einsetzen der Spezialfälle mit den Ergebnissen aus der Literatur verglichen. Bei den Rechnungen wurden viele Zwischenergebnisse angegeben, um bei eventuell erforderlichen weiterführenden

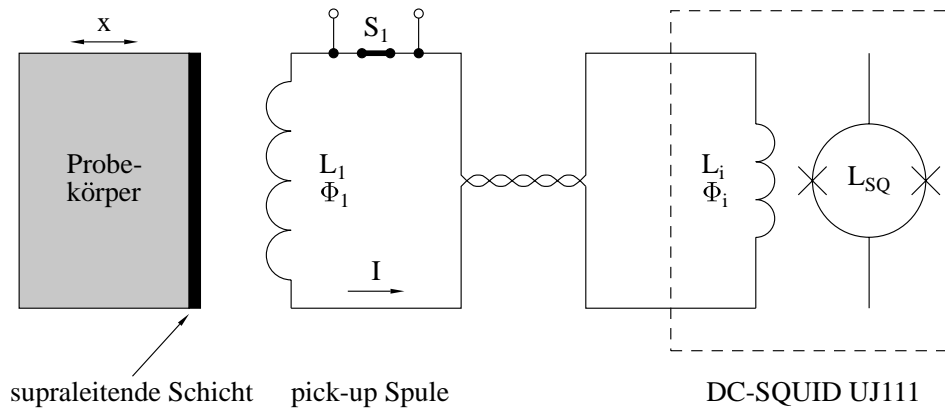


Abbildung 3.1: Einfacher Positionsdetektor

Rechnungen (z.B. Abweichungen zwischen den Induktivitätsverläufen) auf diese Zwischenergebnisse aufbauen zu können.

Die Untersuchung von supraleitenden Gleichstromkreisen ähnelt im wesentlichen der Untersuchung von normalleitenden Kreisen. Während die Ströme in normalleitenden Kreisen mit Hilfe des Maschensatzes für die Spannungen und des Knotensatzes für die Ströme berechnet werden [56], sind bei supraleitenden Gleichstromkreisen einige Modifikationen notwendig, da es einerseits über den Supraleitern keine Spannungsabfälle und andererseits keine supraleitenden Gleichstromquellen gibt. Neben den weiterhin gültigen Knotensätzen verwendet man daher in supraleitenden Kreisen die Beziehungen für die Flußerhaltung. Diese Beziehungen haben die gleiche Struktur wie die Maschensätze in Gleichstromkreisen, wobei an die Stelle der Spannungsquellen die extern in die Kreise eingepprägten Flüsse und an die Stelle der Spannungsabfälle über den Widerständen die Flüsse in den Induktivitäten treten. Die Berechnung der Ströme erfordert also die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

3.2 Einfacher Positionsdetektor

Die einfachste Version eines SQUID-basierten Positionsdetektors, mit der auch unsere Untersuchungen begannen [57–59], ist in Abb. 3.1 dargestellt. Er besteht aus einer einzelnen Detektorspule, einem thermischen Supraleitungs-Normalleitungs-Schalter und dem SQUID, die in einem supraleitenden Kreis zusammengeschaltet werden. Über den thermischen Schalter wird ein Strom I_0 in den Kreis eingespeist und damit gezielt der Fluß Φ_I im supraleitenden Kreis eingefroren.

Nach dem Schließen des supraleitenden Schalters führt eine Änderung der Position des Körpers x zu einer Änderung der Induktivität der Detektorspule $L_1(x)$ und damit des Flusses in dieser Spule. Aufgrund der Flußerhaltung in einem supraleitenden Kreis führt dies zu einer Änderung des Flusses in der SQUID-Eingangsspule. Dieser Fluß wird mit Hilfe des SQUIDs gemessen. Wegen der Flußerhaltung gilt:

$$\Phi_I = L_0 I_0 + L_i I_0, \quad \Phi_I = L_1(x) I(x) + L_i I(x), \quad (3.3)$$

wobei L_i die Induktivität der SQUID-Eingangsspule, L_0 die Induktivität der Detektorspule während des Einfrierens des Flusses und $I(x)$ der aktuelle Strom im Kreis ist. Für den Strom im Kreis gilt:

$$I(x) = I_0 \frac{L_0 + L_i}{L_1(x) + L_i} . \quad (3.4)$$

Somit folgt für die Empfindlichkeit:

$$\frac{dI}{dx} = -\frac{L_0 + L_i}{(L_1(x) + L_i)^2} \cdot I_0 \cdot \frac{dL_1}{dx} = -\frac{I(x)}{L_1(x) + L_i} \cdot \frac{dL_1}{dx} . \quad (3.5)$$

Die Empfindlichkeit ist proportional zum eingespeisten Strom und zur Ableitung der Induktivität nach der Position. Um ein gutes Auflösungsvermögen zu erreichen, sollte man daher einen möglichst großen Strom im supraleitenden Kreis einspeisen und eine möglichst große relative Änderung der Induktivität der Detektorspule nach der Position anstreben. Dagegen ist die Induktivität L_i durch die Wahl des SQUIDs vorgegeben. Außerdem sollte $L_1(x)$ für Positionen im angestrebten Arbeitsbereich an die Induktivität der SQUID-Eingangsspule angepaßt sein.

Der Detektor mit einer einzelnen Spule hat einige schwerwiegende Nachteile:

- Der gesamte Strom, der durch die Detektorspulen fließt und damit die Empfindlichkeit des Detektors bestimmt, fließt auch durch die SQUID-Eingangsspule. Dieser Strom ist z.B. beim SQUID UJ-111 auf 2 mA [9] beschränkt. Oberhalb dieses Stromes wird die Eingangsspule teilweise normalleitend, so daß der Detektor nicht mehr korrekt funktioniert. Durch diese Beschränkung des eingespeisten Stromes ist auch das erzielbare Auflösungsvermögen stark eingeschränkt.
- Der Positionsdetektor übt bei allen Positionen des Meßobjekts eine abstoßende Kraft auf dieses aus. Dies führt bei unserem Experiment zu einer Verfälschung des Meßergebnisses, da dort kleinste Beschleunigungsdifferenzen gemessen werden sollen.
- Der Detektor ist sehr empfindlich gegen seitliche Bewegungen, bei denen sich ebenfalls die Induktivität der Detektorspule ändern kann.

3.3 Symmetrischer Positionsdetektor

3.3.1 Schaltung

Aufgrund der im vorangehenden Kapitel beschriebenen Probleme ist ein Detektor mit zwei Detektorspulen vorzuziehen [60]. Die beiden Spulen liegen an gegenüberliegenden Enden des Testkörpers. Bewegt sich der Körper, so verringert die eine Spule ihre Induktivität, während sich die Induktivität der anderen Spule erhöht. Die Schaltung eines solchen Detektors ist in Abb. 3.2 dargestellt.

Die Fluß- und Stromverteilung im supraleitenden Kreis ist durch die Flußerhaltung in den zwei Maschen des Kreises und den Knotensatz für den Strom bestimmt. Die Maschen bestehen aus je einer Detektorspule und der Eingangsspule des SQUIDs:

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + L_i I_i , \quad \Phi_2 = L_2 I_2 - L_i I_i , \quad I_i = I_1 - I_2 . \quad (3.6)$$

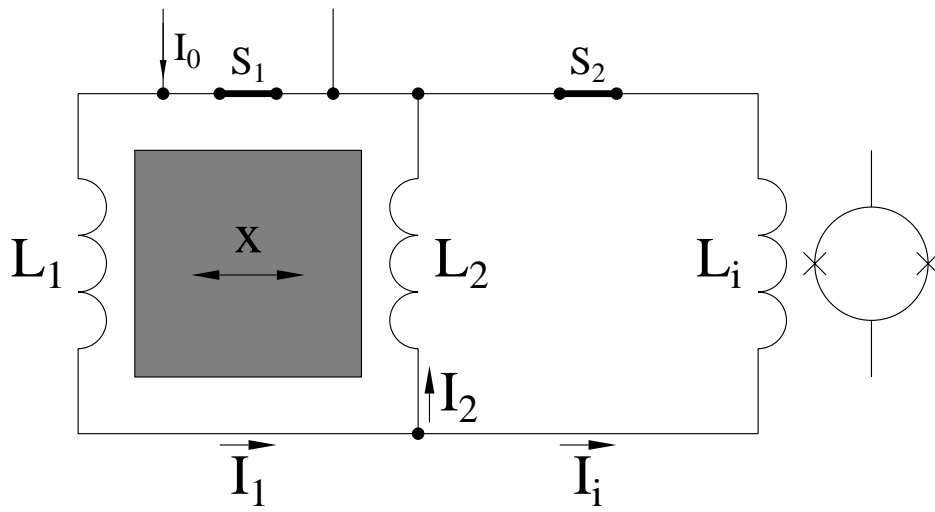


Abbildung 3.2: Detektor mit 2 Spulen

Dabei sind Φ_1 und Φ_2 die in den einzelnen Maschen eingefrorenen Flüsse und L_1 , L_2 bzw. L_i die Induktivitäten der beiden Detektorspulen bzw. der SQUID-Eingangsspule. Durch Lösung des Gleichungssystems für die drei unbekannten Ströme I_1 , I_2 und I_i erhält man für den Strom in der SQUID-Eingangsspule:

$$I_i = \frac{\Phi_1 L_1^{-1} - \Phi_2 L_2^{-1}}{L_i(L_1^{-1} + L_2^{-1} + L_i^{-1})} . \quad (3.7)$$

Für den Detektor werden im Idealfall zwei identische Detektorspulen und ein symmetrischer Körper verwendet. Da sich diese an gegenüberliegenden Seiten des Körpers befinden, gilt für die Induktivitäten $L_1(x) = L_2(-x)$. Dabei entspricht der Punkt $x = 0$ einer symmetrischen Lage des Körpers zwischen den Detektorspulen. Für diese Position haben die Spulen die gleiche Induktivität $L_1(0) = L_2(0) = L_0$. Außerdem gilt für die Ableitungen $\frac{dL_1}{dx}(0) = -\frac{dL_2}{dx}(0) = L'$ und $\frac{d^2 L_1}{dx^2}(0) = \frac{d^2 L_2}{dx^2}(0) = L''$. Weiterhin wird angestrebt, daß bei Mittellage des Körpers durch beide Detektorspulen der gleiche Strom fließt, da sich in diesem Fall die abstoßenden Kräfte der Detektorspulen auf den Körper gegenseitig kompensieren.

3.3.2 Empfindlichkeit

Zur Vereinfachung der Schreibweise führt man die Kehrwerte der Induktivitäten $G_1 = L_1^{-1}$ und $G_2 = L_2^{-1}$ ein. Für die Empfindlichkeit gilt damit:

$$\frac{dI}{dx} = \frac{G'_1 \Phi_1 - G'_2 \Phi_2}{L_i(G_1 + G_2) + 1} - \frac{G_1 \Phi_1 - G_2 \Phi_2}{(L_i(G_1 + G_2) + 1)^2} \cdot (G'_1 + G'_2) . \quad (3.8)$$

An der Stellen $x = 0$ gilt aus Symmetriegründen $G'_1 = -G'_2$, d.h. der hintere Summand verschwindet. Damit gilt:

$$\frac{dI}{dx}(0) = \frac{(\Phi_1 + \Phi_2)G'_1}{2L_i L_0^{-1} + 1} . \quad (3.9)$$

Man erkennt, daß der Detektor eine maximale Empfindlichkeit besitzt, wenn die Flüsse Φ_1 und Φ_2 das gleiche Vorzeichen haben. Ist dagegen $\Phi_1 = -\Phi_2$, so wäre der symmetrische Detektor in der Nähe von $x = 0$ völlig unempfindlich gegen Bewegungen des Körpers.

Eine symmetrische Flußverteilung ($\Phi_1 = \Phi_2$) kann man erzeugen, indem man bei Mittellage des Körpers einen Strom I_0 über dem Schalter S_1 einspeist, während der Schalter S_2 ebenfalls geöffnet ist (siehe Abb. 3.2). Nach dem Schließen der Schalter gilt dann für die Flüsse $\Phi_1 = \Phi_2 = L_0 I_0$. In diesem Fall folgt für die Empfindlichkeit in der Nähe der Mittelposition:

$$\frac{dI}{dx}(0) = \frac{2I_0 L_0}{2L_i L_0^{-1} + 1} \cdot G'_1 = -\frac{2I_0 L'}{2L_i + L_0} . \quad (3.10)$$

Während sich die Abhängigkeit des Stromes für sehr kleine Auslenkungen durch eine lineare Funktion beschreiben läßt, benötigt man für etwas größere Auslenkungen auch die höheren Glieder der Taylorentwicklung:

$$I_i(x) = \sum_k \frac{d^k I_i}{dx^k}(0) \cdot \frac{x^k}{k!} . \quad (3.11)$$

Zumindest die Ableitungen gerader Ordnung lassen sich dabei leicht ermitteln. Für einen symmetrischen Detektor ($L_1(x) = L_2(-x)$) mit der Flußverteilung $\Phi_1 = \Phi_2$ gilt nämlich:

$$I_i(-x) = \frac{\Phi_1[L_1(-x)]^{-1} - \Phi_2[L_2(-x)]^{-1}}{L_i([L_1(-x)]^{-1} + [L_2(-x)]^{-1} + L_i^{-1})} = -I_i(x) . \quad (3.12)$$

Die Funktion $I_i(x)$ ist also antisymmetrisch. Damit verschwinden alle geraden Ableitungen sowie der Funktionswert im Punkt $x = 0$:

$$\frac{d^{2n} I_i}{dx^{2n}}(0) = 0 \quad \text{für } n = 0, 1, 2, \dots . \quad (3.13)$$

3.3.3 Kräfte auf den Detektor

Die Kraft auf den Körper läßt sich aus der magnetischen Energie der supraleitenden Kreise bestimmen, für die gilt:

$$E = \frac{1}{2} [I_1^2 L_1 + I_2^2 L_2 + I_i^2 L_i] . \quad (3.14)$$

Aus den Gleichungen (3.6) und (3.14) erhält man durch diverse Umformungen:

$$E = \frac{1}{2} \frac{(\Phi_1 + \Phi_2)^2 L_i + \Phi_1^2 L_2 + \Phi_2^2 L_1}{L_1 L_2 + L_i L_1 + L_i L_2} . \quad (3.15)$$

Zur Berechnung der Kräfte werden die folgenden Substitutionen verwendet:

$$f(x) = (\Phi_1 + \Phi_2)^2 L_i + \Phi_2^2 L_1 + \Phi_1^2 L_2 , \quad h(x) = 2(L_1 L_2 + L_1 L_i + L_2 L_i) , \quad (3.16)$$

wobei im folgenden auf die Argumente der Funktionen verzichtet wird. Die Kraft auf den Körper ergibt sich durch Ableitung der Energie nach der Position:

$$F = -\frac{dE}{dx} = -\frac{f'h - h'f}{h^2} . \quad (3.17)$$

Für die Federkonstante $K = -\frac{dF}{dx} = \frac{d^2 E}{dx^2}$ in der Nähe des Gleichgewichtes ($\frac{dE}{dx} = 0$) gilt:

$$K = \frac{f''h + f'h' - h''f - h'f'}{h^2} - 2\frac{f'h - h'f}{h^3} h' = \frac{f''h - fh''}{h^2} . \quad (3.18)$$

mit

$$f'' = \Phi_1^2 \frac{d^2 L_1}{dx^2} + \Phi_2^2 \frac{d^2 L_2}{dx^2}, \quad h'' = 2 \left[\frac{d^2 L_1}{dx^2} (L_i + L_2) + \frac{d^2 L_2}{dx^2} (L_i + L_1) + 2 \frac{dL_1}{dx} \cdot \frac{dL_2}{dx} \right]. \quad (3.19)$$

Speist man in beide Kreise die gleichen Flüsse ein ($\Phi_1 = \Phi_2 = I_0 L_0$) und haben die beiden Detektorspulen die gleiche Geometrie $L'_1 = -L'_2$, so verschwinden f' und h' im Punkt $x = 0$. Entsprechend Gl.(3.17) verschwindet damit auch die Kraft bei zentrierter Lage des Körpers. Für die Federkonstante eines solchen Detektors gilt:

$$K = I_0^2 \left[\frac{2(L')^2}{L_0 + 2L_i} - L'' \right] = \left(\frac{dI}{dx} \right)^2 \cdot (L_i + \frac{1}{2}L_0) - I_0^2 L''. \quad (3.20)$$

Man sieht, daß mit wachsendem Betrag der Empfindlichkeit in der Regel auch die Federkonstante und damit die Rückwirkung des Detektors auf den Körper zunimmt. Verwendet man Flachspulen als Detektorspulen, so ist $L'' < 0$, d.h. die abstoßende Kraft auf einen Supraleiter vergrößert sich bei Annäherung. Für diese Form des Detektors ist die Federkonstante stets größer als 0, d.h. der Detektor versucht, den Testkörper in der Mitte zu zentrieren. Dies trifft auch für viele andere Detektorspulen-Testkörper-Geometrien zu. Für Induktivitätsverläufe, bei denen für einen gewissen Positionsbereich $L'' > 0$ ist (siehe Kap. 4.8 bzw. 4.9), kann man eine negative Federkonstante (instabiles Gleichgewicht) erzeugen. Man muß nur L_i hinreichend groß wählen, z.B. durch Reihenschaltung von zusätzlichen Induktivitäten, so daß der Bruch in der eckigen Klammer von Gl. (3.20) gegenüber L'' vernachlässigt werden kann. Auch die Erzeugung eines Detektors mit der Federkonstante 0 wäre möglich. Allerdings wäre bei vorgegebenem I_0 die Empfindlichkeit dieses Detektors relativ schlecht.

Für die Berechnung der Federkonstante des linearen Detektors und zum Vergleich mit dem nachfolgenden differentiellen Detektor wird eine Darstellung von Gl. (3.20) mit Hilfe der Kehrwerte der Induktivität benötigt:

$$K = \Phi_1^2 \left[G_1'' - \frac{4(G_1')^2}{2G_1 + G_i} \right]. \quad (3.21)$$

3.3.4 Linearer Detektor

Für die geplanten Fallexperimente wird ein möglichst linearer Detektor benötigt. Im folgenden soll daher ein Induktivitätsverlauf ermittelt werden, für den der Detektor im gesamten Arbeitsbereich linear ist. Dazu wählt man für die Kehrwerte der Induktivitäten der beiden Detektorspulen den Ansatz:

$$(L_1(x))^{-1} = \sum_{i=0}^N a_i x^i, \quad (L_2(x))^{-1} = (L_1(-x))^{-1} = \sum_{i=0}^N (-1)^i a_i x^i, \quad (3.22)$$

wobei die a_i Konstanten sind, die im folgenden näher bestimmt werden sollen. Die Koeffizienten bei der Polynomzerlegung von $(L_1)^{-1}$ sollen oberhalb von N verschwinden. Wählt man eine symmetrische Flußverteilung $\Phi_1 = \Phi_2 = I_0 L_0$ und den linearen Ansatz $I_i(x) = \hat{I}_i \cdot x$ für den Strom in der SQUID-Spule (bei symmetrischen Detektoren ist $I_i(0) = 0$) mit der konstanten Empfindlichkeit des Detektors \hat{I}_i , so folgt aus Gl. (3.7):

$$\hat{I}_i \cdot x = \frac{I_0 L_0}{L_i} \frac{\sum_{i=0}^N a_i (1 - (-1)^i) x^i}{L_i^{-1} + \sum_{i=0}^N a_i (1 + (-1)^i) x^i}. \quad (3.23)$$

Damit verschwinden im Zähler die geraden Potenzen von x , während im Nenner die ungeraden Potenzen verschwinden. Um bei der Division der beiden Polynome ein konstantes Vielfaches von x zu erhalten, müssen die geraden und ungeraden Koeffizienten a_i in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen. Durch Koeffizientenvergleich erhält man:

$$c_0(L_i^{-1} + 2a_0) = 2a_1, \quad c_0a_{2i} = a_{2i+1} \quad \text{mit } i = 1, 2, \dots, \quad (3.24)$$

wobei c_0 eine Konstante ist, die mit der angestrebten Empfindlichkeit \hat{I}_i durch die folgende Beziehung verbunden ist:

$$c_0 = \frac{\hat{I}_i L_i a_0}{I_0}. \quad (3.25)$$

Der einfachste Ausdruck, der der Bedingung (3.24) entspricht, ist der Ansatz:

$$L_1 = \frac{1}{a_0 + a_1 x}, \quad L_2 = \frac{1}{a_0 - a_1 x}. \quad (3.26)$$

Entsprechend Gl. (3.7) erhält man für diese Ansätze auch für eine asymmetrische Flußverteilung einen linearen Detektor:

$$I_i(x) = \frac{(\Phi_1 - \Phi_2)a_0}{2L_i a_0 + 1} + \frac{(\Phi_1 + \Phi_2)a_1}{2L_i a_0 + 1} \cdot x. \quad (3.27)$$

Für die übliche Flußverteilung $\Phi_1 = \Phi_2 = I_0 L_0$ ergibt sich dabei:

$$I_i(x) = \frac{2I_0 a_1}{2a_0^2 L_i + a_0} \cdot x. \quad (3.28)$$

Auch der Kraftverlauf ist linear:

$$F = -\frac{dE}{dx} = \frac{L_i(\Phi_1 + \Phi_2)^2 a_1^2}{1 + 2L_i a_0} \cdot x - \frac{(\Phi_1^2 - \Phi_2^2)a_1}{2 + 4L_i a_0}. \quad (3.29)$$

Bei einer symmetrischen Flußverteilung $\Phi_1 = \Phi_2 = I_0 L_0 = I_0/a_0$ folgt für die Federkonstante:

$$K = \frac{-4L_i I_0^2 a_1^2}{(1 + 2L_i a_0)a_0^2} = -\left(\frac{dI_i}{dx}\right)^2 L_i \cdot (2L_i a_0 + 1). \quad (3.30)$$

Da L_1 bei $x = 0$ positiv sein muß, ist auch a_0 positiv. Damit besitzt der Detektor eine negative Federkonstante.

Neben der oben beschriebenen einfachen Abhängigkeit zwischen Induktivität und Position liefern auch Polynome höheren Grades bei symmetrischer Flußverteilung einen linearen Zusammenhang zwischen Position und Induktivität, sofern sie die Beziehungen (3.24) erfüllen. Im folgenden soll untersucht werden, unter welchen Bedingungen dies auch bei asymmetrischer Flußverteilung $\Phi_1 = \Phi_2 + \Delta\Phi = I_0 L_0 + \Delta\Phi$ gilt. Bei einer asymmetrischen Flußverteilung ist $I_i(0) \neq 0$. Daher lautet der lineare Ansatz $I_i = Bx + C$, wobei B und C Konstanten sind. Berücksichtigt man, daß der Detektor bei symmetrischer Flußverteilung die Gl. (3.23) erfüllt, so erhält man aus Gl. (3.7):

$$Bx + C = \hat{I}_i x + \Delta\Phi \frac{\sum_{n=0}^N a_n x^n}{L_i^{-1} + \sum_{n=1}^N (1 + (-1)^n) a_n x^n}. \quad (3.31)$$

Multipliziert man die Gleichung mit dem Nenner des Bruchs und führt einen Koeffizientenvergleich des Polynoms durch, so erhält man für Koeffizienten der geraden Potenzen von x :

$$L_i^{-1}C + 2a_0C = \Delta\Phi \cdot a_0, \quad (3.32)$$

$$2a_{2n}C = \Delta\Phi \cdot a_{2n} \quad \text{für } n = 1, 2, \dots. \quad (3.33)$$

Multipliziert man Gl.(3.32) mit a_{2n} und setzt man Gl. (3.33) ein, so erhält man:

$$Ca_{2n}L_i^{-1} = 0 \quad \text{für } n = 1, 2, \dots. \quad (3.34)$$

Damit gilt entweder $a_{2n} = 0$ (für alle $n > 1$) oder aber es gilt $C = 0$. Die letzte Variante würde jedoch wegen Gl. (3.32) bedeuten, daß auch $\Delta\Phi = 0$ ist, also die Flußverteilung symmetrisch ist.

Benötigt man also einen Induktivitätsverlauf, der nicht nur für symmetrische sondern für alle Flußverteilungen einen linearen Detektor liefert, so muß dieser dem Ansatz (3.26) entsprechen. Auch wenn es nicht gelingen sollte, einen solchen Induktivitätsverlauf in der Praxis zu erzeugen, sollte der verwendete Induktivitätsverlauf zumindest diesem Verlauf ähneln, d.h. es sollte möglichst $L'' > 0$ sein.

3.3.5 Seitliche Bewegung

Wie die Fallexperimente gezeigt haben, reagiert der Positionsdetektor auch auf seitliche Bewegungen. Dies liegt daran, daß sich die Induktivität der Detektorspulen nicht nur bei einer axialen Bewegung des Testkörpers ändert, sondern auch bei einer Bewegung in radialer Richtung. So nimmt zum Beispiel bei einer kurzen Zylinderspule die Feldstärke vom Zentrum beginnend in radialer Richtung zu. Taucht ein supraleitender Zylinder in eine solche Spule, und wird er aus koaxialen Lage in radialer Richtung nach außen bewegt, so verdrängt er um so mehr Fluß, je weiter er sich den Drähten der Spule nähert. Die Induktivität hat also bei koaxialer Lage ein Maximum und nimmt bei einer Bewegung in radialer Richtung ab.

In diesem Abschnitt soll diskutiert werden, welchen Einfluß die seitliche Bewegung auf das Detektorsignal hat, und wie sich dieser Einfluß klein halten läßt. Die Untersuchung beschränken sich dabei auf einen Detektor mit radialsymmetrischen Tauchspulen. Der Körper besitzt neben der Bewegung in axialer Richtung, die vorrangig gemessen werden soll, und einer Rotation um die Symmetrieachse, die keinen Einfluß auf die Induktivität hat, noch vier weitere Freiheitsgrade. Es handelt sich dabei um zwei Freiheitsgrade der Verschiebung senkrecht zur Achse und die zwei Freiheitsgrade der Rotation, bei denen die Achse des Körpers gegen die Achse der Spulen verkippt wird. Wegen der Symmetrie haben die Freiheitsgrade der Verschiebung jeweils den gleichen Einfluß auf die Induktivität¹, d.h. der Induktivitätsverlauf ist unabhängig davon, in welche Richtung der Körper bewegt wird. Das gleiche gilt auch für die Verkipfung. Dies ändert sich jedoch sofort, sobald der Körper sowohl verkippt als auch als auch seitlich verschoben wird oder die zwei möglichen Verschiebungen quer zur Achse gleichzeitig (aber phasenversetzt) auftreten.

¹Dies gilt natürlich nur für Auslenkungen aus der koaxialen Lage.

Zur Vereinfachung soll als erstes eine reine Verschiebung in radialer Richtung betrachtet werden, bei der die Achsen des Zylinders und der Spulen parallel verlaufen. Die Induktivität der Detektorspulen hängt von der Position des Körpers in senkrechter Richtung x und dem Abstand der Achsen von Zylinder und Spule r ab. Da die Induktivität $L(x, r)$ bei zentrierter Lage ein Maximum hat, und der Induktivitätsverlauf symmetrisch bezüglich r ist, muß $\partial L / \partial r(x, 0) = 0$ sein, d.h. bei kleinen Auslenkungen aus der zentrierten Lage ändert sich die Induktivität nur unwesentlich. Die Änderung der Induktivität bei seitlichen Auslenkungen $\Delta L = L(x, r) - L(x, 0)$ hängt davon ab, wie tief der Zylinder in die Spule eingetaucht ist. Je tiefer er sich in der Spule befindet, desto größer ist auch der Betrag von ΔL . Als vereinfachtes Modell für den Induktivitätsverlauf in der Nähe von $x = 0$ erhält man in erster Näherung einen Ausdruck der Form $L(x, r) \approx L_s(x) + L_r(r^2) + x \cdot \tilde{L}_r(r^2)$, wobei L_s , L_r und \tilde{L}_r Funktionen sind, die entweder von r oder x abhängen.

Für einen Detektor mit symmetrischer Flußverteilung ($\Phi_1 = \Phi_2$) und identischen coaxialen Zylinderspulen ($L_1(x, r) = L_2(-x, r)$) gilt entsprechend Gl. 3.7:

$$I_i(0, r) = \frac{-L_1(0, r)\Phi_2 + L_2(0, r)\Phi_1}{L_1L_2 + L_iL_1 + L_iL_2} = \frac{-L_1(0, r)\Phi_1 + L_1(-0, r)\Phi_1}{L_1L_2 + L_iL_1 + L_iL_2} = 0, \quad (3.35)$$

d.h. für $x = 0$ ist der Detektor unempfindlich gegen seitliche Verschiebungen des Zylinders. Allerdings gilt dies nur, wenn die Achsen der Spulen übereinstimmen, da sonst selbst bei identischen Spulen $L_1(x, r) \neq L_2(-x, r)$ ist. Auch bei asymmetrischer Flußverteilung $\Phi_1 \neq \Phi_2$ heben sich die Ausdrücke im Zähler von Gl. (3.35) nicht mehr gegenseitig auf. Der Detektor ist dann selbst bei einer senkrechten Position x , bei der $I(x, 0) = 0$ ist, empfindlich gegen seitliche Bewegungen. Man sollte sich daher bemühen, identische Flüsse im Detektor einzufrieren.

Befindet sich der Körper außerhalb der Mittellage ($x \neq 0$), so hängt I_i in der Regel von r ab. Man kann zwar theoretische Induktivitätsverläufe finden, wie z. B. $L(x, r) = (a + bx + cr^2 + d \cdot x \cdot r^2)^{-1}$, die einen Detektorstrom liefern, der nicht von r abhängt², praktisch lassen sich solche Induktivitätsverläufe jedoch nicht definiert erzeugen. Der Strom in der SQUID-Eingangsspule läßt sich aufgrund der Symmetrie in der Umgebung von $x = 0$ durch einen Ausdruck der Form:

$$I_i(x, r) \approx \hat{I}x + x \cdot f(r^2) \quad (3.36)$$

annähern, wobei \hat{I} die Empfindlichkeit in senkrechter Richtung und f eine Funktion der radialen Auslenkung ist, die bei $r = 0$ verschwindet. Ein solches Verhalten konnte auch in den Fallexperimenten bestätigt werden. Führt der Körper eine Schwingung in senkrechter Richtung aus, so erhielt man als Positionssignal eine Schwingung, deren Amplitude durch die seitliche Bewegung moduliert war. Für sehr kleine radiale Auslenkungen um die Position $r = 0$ ist der Detektor nahezu unempfindlich.

Die Betrachtungen, die für eine radiale Verschiebung angestellt wurden, gelten auch für eine Drehung des Körpers um seinen Mittelpunkt, wenn der Mittelpunkt auf der Achse der Spulen liegt. Die Induktivitäten der beiden Detektorspulen sind dann gleich, wenn sich das Zentrums des Körpers genau in der Mitte zwischen den Spulen befindet. Der Detektor reagiert

²Die Koeffizienten a und b können frei gewählt werden, die Koeffizienten c und d müssen in einem bestimmten Verhältnis zueinander stehen, das durch a, b und L_i bestimmt wird.

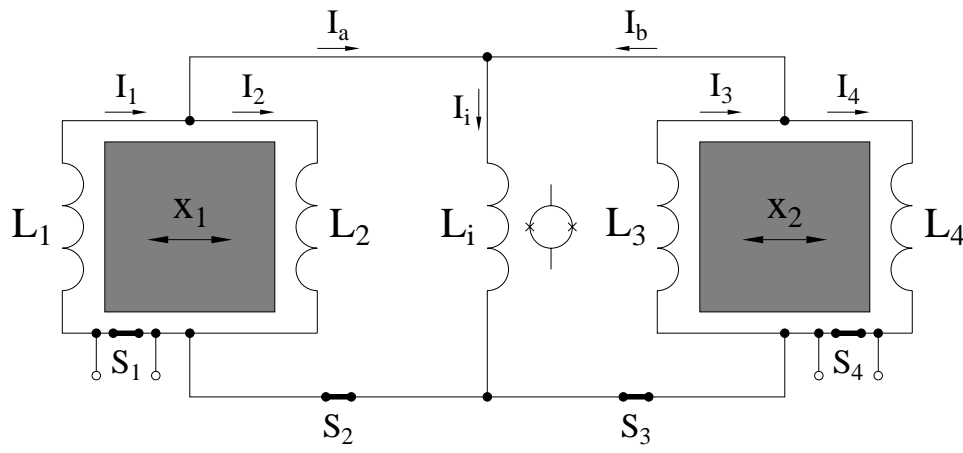


Abbildung 3.3: Prinzipschaltbild eines Positionsdetektors mit zwei Testkörpern

in diesem Fall nicht auf ein Verkippen des Körpers. Sobald man jedoch den Mittelpunkt des Körpers radial aus der Achse der Spulen verschiebt, und den Körper gleichzeitig verkippt, ändern sich die Induktivitäten der beiden Detektorspulen auf unterschiedliche Weise, so daß es zu einem Signal des Detektors kommt. Man sollte daher nicht nur die radiale Bewegung und die Drehung des Körpers möglichst klein halten, sondern den Körper möglichst auf der Achse zur Ruhe bringen, damit das Detektorsignal für kleine Auslenkungen Δr mit $(\Delta r)^2$ gegen 0 geht und die Empfindlichkeit gegen seitliche Bewegungen bei $x = 0$ auch für größere Auslenkungen verschwindet.

3.4 Differentieller Detektor

3.4.1 Schaltung

Für die Bestimmung des Eötvöskoeffizienten ist es notwendig, die Relativbewegung zweier Körper zueinander zu bestimmen. Dazu kann man entweder die Position jedes einzelnen Körpers messen und durch Subtraktion der Meßwerte den Abstand ermitteln, oder man schaltet die Detektorspulen der einzelnen Körper auf geeignete Weise zusammen, so daß der Strom in der SQUID-Eingangsspule nur von der Positionsdivergenz der beiden Körper abhängt.

Eine Möglichkeit eines solchen Detektors ist in Abb. 3.3 dargestellt [26,61]. Dabei sind die Detektorspulen, die zum selben Körper gehören, jeweils identisch gebaut, d.h. $L_1(x) = L_2(-x)$ und $L_3(x) = L_4(-x)$. Dagegen werden sich $L_1(x)$ und $L_3(x)$ in der Regel unterscheiden, da die Körper ineinander geschachtelt sind und somit nicht nur die Körper, sondern meist auch die Spulen deutlich unterschiedliche Abmessungen besitzen (siehe Abb. 2.2).

Als Ausgangspunkt für die Berechnung des Stromes I_i in der SQUID-Eingangsspule dienen analog zu Kap. 3.3 die Beziehungen für die Flußerhaltung in den vier Maschen, bestehend aus je einer der Detektorspulen sowie der SQUID-Eingangsspule:

$$\Phi_1 = L_1 I_1 + L_i I_i, \quad \Phi_2 = L_2 I_2 - L_i I_i, \quad \Phi_3 = L_3 I_3 + L_i I_i, \quad \Phi_4 = L_4 I_4 - L_i I_i, \quad (3.37)$$

wobei I_1, I_2, I_3 und I_4 die Ströme in den jeweiligen Detektorspulen sind. Φ_1, Φ_2, Φ_3 und Φ_4 sind

die in den jeweiligen Maschen eingefrorenen Flüsse. Die 5. Gleichung für das Gleichungssystem zur Bestimmung der 5 unbekannten Ströme liefert der Knotensatz:

$$I_i = I_a + I_b = I_1 - I_2 + I_3 - I_4 . \quad (3.38)$$

Durch Lösung des Gleichungssystems erhält man:

$$I_i = \frac{\Phi_1 L_1^{-1} - \Phi_2 L_2^{-1} + \Phi_3 L_3^{-1} - \Phi_4 L_4^{-1}}{L_i(L_1^{-1} + L_2^{-1} + L_3^{-1} + L_4^{-1}) + 1} . \quad (3.39)$$

3.4.2 Empfindlichkeit

Da man es hier mit zwei Körpern zu tun hat, kann man sowohl die Empfindlichkeit des Systems gegenüber Bewegungen des Körpers 1, als auch gegenüber Bewegungen des Körpers 2 berechnen. Dabei hängen die Induktivitäten L_1 und L_2 von x_1 ab und die Induktivitäten L_3 und L_4 von der Position x_2 . Für symmetrische Detektoren gilt:

$$\begin{aligned} L_1(0) = L_2(0) = L_a , \quad \frac{\partial L_1}{\partial x_1}(0) = -\frac{\partial L_2}{\partial x_1}(0) = L'_a , \\ L_3(0) = L_4(0) = L_b , \quad \frac{\partial L_3}{\partial x_2}(0) = -\frac{\partial L_4}{\partial x_2}(0) = L'_b . \end{aligned} \quad (3.40)$$

Wegen der Struktur von Gl. (3.39) empfiehlt es sich, die Kehrwerte der Induktivitäten $G_k = L_k^{-1}$ ($k = 1, \dots, 4$) zu verwenden. Für die Ableitungen gilt:

$$G'_1 = \frac{\partial G_1}{\partial x_1} , \quad G'_2 = \frac{\partial G_2}{\partial x_1} , \quad G'_3 = \frac{\partial G_3}{\partial x_2} , \quad G'_4 = \frac{\partial G_4}{\partial x_2} . \quad (3.41)$$

Damit gilt für Empfindlichkeit gegenüber Bewegungen von Körper 1:

$$\frac{\partial I_i}{\partial x_1} = \frac{G'_1 \Phi_1 - G'_2 \Phi_2}{L_i(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) + 1} - \frac{(G'_1 + G'_2)(G_1 \Phi_1 - G_2 \Phi_2)}{(L_i(G_1 + G_2 + G_3 + G_4) + 1)^2} . \quad (3.42)$$

Die Struktur von $\partial I_i / \partial x_2$ ist analog. Für einen symmetrischen Detektor gilt damit:

$$\frac{\partial I}{\partial x_1}(0,0) = G'_a \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{L_i(2G_a + 2G_b) + 1} , \quad \frac{\partial I}{\partial x_2}(0,0) = G'_b \frac{\Phi_3 + \Phi_4}{L_i(2G_a + 2G_b) + 1} \quad (3.43)$$

$$\text{mit } G_a = G_1(0) = G_2(0) , \quad G'_a = G'_1(0) = -G'_2(0) ,$$

$$G_b = G_3(0) = G_4(0) , \quad G'_b = G'_3(0) = -G'_4(0) .$$

Für den Einsatz als Differenzdetektor ist weniger die absolute Empfindlichkeit des Detektors gegen Änderungen von x_1 und x_2 von Interesse, sondern die Frage, wie er sich bei Änderungen der Positionsdifferenz $x_d = x_1 - x_2$ bzw. bei simultaner Verschiebung beider Körper $x_m = (x_1 + x_2)/2$ verhält. Für die Empfindlichkeit des Detektors gegenüber Änderungen dieser Größen gilt:

$$\frac{\partial \tilde{I}_i}{\partial x_d} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial I_i}{\partial x_1} - \frac{\partial I_i}{\partial x_2} \right] , \quad \frac{\partial \tilde{I}_i}{\partial x_m} = \frac{\partial I_i}{\partial x_1} + \frac{\partial I_i}{\partial x_2} , \quad (3.44)$$

wobei sich $\tilde{I}_i(x_d, x_m) = I_i(x_m + \frac{1}{2}x_d, x_m - \frac{1}{2}x_d)$ aus der Funktion I_i durch Substitution der x_1 und x_2 ergibt. Da der Detektor in der Nähe des angestrebten Arbeitspunktes unempfindlich gegen gemeinsame Bewegungen der beiden Körper sein sollte, gilt:

$$\frac{\partial \tilde{I}_i}{\partial x_m} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial I_i}{\partial x_1} = -\frac{\partial I_i}{\partial x_2} . \quad (3.45)$$

Aus den Gln. (3.43) folgt damit die Abgleichbedingung für den Detektor:

$$(\Phi_1 + \Phi_2)G'_a = -(\Phi_3 + \Phi_4)G'_b . \quad (3.46)$$

Des weiteren soll $\partial \tilde{I}_i / \partial x_d$ möglichst groß sein. Aufgrund von Gl. (3.45) und Gl. (3.44) sollte man versuchen, $\partial I_i / \partial x_1$ möglichst groß zu wählen. Um dies zu erreichen, müssen Φ_1 und Φ_2 wegen Gl. (3.43) die gleichen Vorzeichen besitzen. Üblicherweise verwendet man $\Phi_1 = \Phi_2$, da sich dabei die Kräfte, die die Detektorspulen auf den Körper ausüben, im Nullpunkt aufheben. Aus dem gleichen Grund sollte $\Phi_3 = \Phi_4$ sein.

Eine solche Flußverteilung läßt sich erreichen, wenn man über Schalter S_1 einen Strom von von I_{0a} und über S_4 einen Strom von I_{0b} einspeist (siehe Abb. 3.3). Während des Einspeisens der Ströme sind die Schalter S_2 bzw. S_3 ebenfalls geöffnet. Damit erhält man für die Flüsse:

$$\Phi_1 = \Phi_2 = I_{0a}L_a , \quad \Phi_3 = \Phi_4 = I_{0b}L_b . \quad (3.47)$$

Entsprechend der Abgleichbedingung (3.46) und unter Berücksichtigung der Beziehungen $G'_1(0) = -L'_a/L_a^2$ und $G'_3(0) = -L'_b/L_b^2$ folgt:

$$\frac{L'_a}{L_a} \cdot I_{0a} = -\frac{L'_b}{L_b} \cdot I_{0b} . \quad (3.48)$$

Da in der Regel $\frac{L'_a}{L_a} \neq \frac{L'_b}{L_b}$ ist, müssen zum Abgleich des Detektors unterschiedliche Ströme I_{0a} und I_{0b} eingespeist werden. Die Werte von L'_a und L'_b sind meist nicht mit der notwendigen Genauigkeit bekannt, um die Ströme exakt zu berechnen. Daher muß das richtige Verhältnis der Ströme experimentell ermittelt werden. Dazu untersucht man, wie sich der Detektor gegenüber gemeinsamen Verschiebungen der Körper ($\Delta x_1 = \Delta x_2$) verhält. Das Verhältnis von I_{0a} und I_{0b} wird solange verändert, bis der Detektor nicht mehr auf solche Verschiebungen reagiert.

Im abgeglichenen Zustand gilt für die Empfindlichkeit gegenüber Änderungen von x_d :

$$\frac{\partial \tilde{I}_i}{\partial x_d} = -\frac{2L'_a I_{0a}}{L_a L_i (2L_a^{-1} + 2L_b^{-1} + L_i^{-1})} . \quad (3.49)$$

3.4.3 Kräfte auf die Körper

Ausgangspunkt für die Berechnung der Kräfte ist wieder die magnetische Energie des Systems:

$$E(x_1, x_2) = \frac{1}{2} (I_1^2 L_1 + I_2^2 L_2 + I_3^2 L_3 + I_4^2 L_4 + I_i^2 L_i) . \quad (3.50)$$

Verwendet man die Substitution $L_5 = L_i$ und $\Phi_5 = 0$, sowie die Gln. (3.37) und (3.38), so folgt:

$$E = \frac{\sum_{k=1}^5 \sum_{m=1}^5 [(\Phi_k - (-1)^{k+m} \Phi_m)^2 L_k^{-1} L_m^{-1}]}{4 \sum_{k=1}^5 L_k^{-1}} . \quad (3.51)$$

Zur Vereinfachung der Darstellung werden wieder die Kehrwerte der Induktivitäten, sowie die folgenden Substitutionen verwendet:

$$f(x_1, x_2) = \sum_{k=1}^5 \sum_{m=1}^5 G_k G_m (\Phi_k - (-1)^{k+m} \Phi_m)^2 , \quad h(x_1, x_2) = 4 \sum_{k=1}^5 G_k . \quad (3.52)$$

Für die Federkonstante in der Nähe der Gleichgewichtslage (x_1^G, x_2^G) gilt:

$$K_1 = \frac{d^2 E}{dx_1^2}(x_1^G, x_2^G) = \frac{f''h - h''f}{h^2} = \frac{f''}{h} - E(x_1^G, x_2^G) \frac{h''}{h} \quad (3.53)$$

mit

$$\begin{aligned} f''(x_1, x_2) &= 2G_1'' \sum_{m=1}^5 G_m (\Phi_1 + (-1)^m \Phi_m)^2 + 2G_2'' \sum_{m=1}^5 G_m (\Phi_2 - (-1)^m \Phi_m)^2 + 4G_1' G_2' (\Phi_1 + \Phi_2)^2, \\ h''(x_1, x_2) &= 4G_1'' + 4G_2'', \end{aligned} \quad (3.54)$$

wobei die Striche für partielle Ableitungen nach x_1 stehen. Für einen symmetrischen Detektor mit symmetrischer Flußverteilung liegt die Gleichgewichtslage bei $(x_1^G, x_2^G) = (0, 0)$ und es gilt:

$$K_1 = \Phi_1^2 \cdot \left[G_a'' - \frac{4(G_a')^2}{2G_a + 2G_b + G_i} \right]. \quad (3.55)$$

Das gleiche Ergebnis würde man auch erhalten, wenn man in der Beziehung für die Federkonstante eines einfachen Detektors Gl. (3.21) die Induktivität L_i durch die Induktivität der Parallelschaltung aus L_i , L_3 und L_4 ersetzt. Der Kehrwert dieser Parallelschaltung im Punkt 0 ist $G_i + 2G_b$. Analog zu Gl. (3.55) kann man auch die Federkonstante für den Körper 2 bestimmen:

$$K_2 = \Phi_3^2 \cdot \left[G_b'' - \frac{4(G_b')^2}{2G_a + 2G_b + G_i} \right]. \quad (3.56)$$

Eine Folge des differentiellen Detektors ist, daß die beiden Testkörper untereinander gekoppelt sind. Befinden sich beide Testkörper im Gleichgewicht, und lenkt man z.B. Körper 2 aus dieser Position aus, so führt dies zu einer Änderung von I_b (siehe Abb. 3.3). Damit erhöht sich der Strom in einer der beiden Spulen L_1 bzw. L_2 , während sich der Strom in der anderen verringert. Dies führt jedoch zu einer Kraft auf den ersten Testkörper³. Man kann damit eine dritte Konstante K_3 einführen, die angibt, wie die Kraft F_1 auf den Körper 1 in der Nähe der Gleichgewichtslage ($\partial E / \partial x_1 = \partial E / \partial x_2 = 0$) von der Änderung von x_2 abhängt:

$$K_3 = -\frac{\partial F_1}{\partial x_2} = -\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1^G, x_2^G) = \frac{1}{h} \cdot \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial h}{\partial x_1} \frac{\partial h}{\partial x_2} \cdot \frac{E}{h} \right], \quad (3.57)$$

wobei F_2 die Kraft auf Körper 2 ist. Die weiteren Ableitungen heben sich im Gleichgewicht auf. Für einen symmetrischen Detektor mit symmetrischer Flußverteilung gilt:

$$K_3 = \frac{\partial^2 E}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) = -\frac{4G_a' G_b' \Phi_1 \Phi_3}{2G_a + 2G_b + G_i}. \quad (3.58)$$

3.4.4 Linearer Detektor

Vorbetrachtungen

Für die meisten Induktivitätsverläufe läßt sich der Detektor nur für sehr kleine Auslenkungen so abgleichen, daß der Strom I_i proportional zu $x_d = x_1 - x_2$ ist und der Einfluß von gemeinsamen Bewegungen der Körper x_m unterdrückt wird.

³Für spezielle Fälle in denen I_1 und I_2 verschwinden oder entgegengesetzt orientiert sind, ergibt sich keine Rückwirkung. Man kann jedoch zeigen, daß der Detektor dann auch unempfindlich gegen Bewegungen von Körper 1 ist.

Die allgemeine Abhängigkeit $\tilde{I}_i(x_d, x_m)$ des Stromes in der Eingangsspule als Funktion von x_d und x_m läßt sich in Form einer Taylor-Reihe darstellen:

$$\tilde{I}_i(x_d, x_m) = \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{1}{s!t!} \frac{\partial^{s+t} \tilde{I}_i}{\partial x_d^s \partial x_m^t}(0, 0) \cdot x_d^s x_m^t .$$

Bei symmetrischer Flußverteilung ($\Phi_1 = \Phi_2$ und $\Phi_3 = \Phi_4$) sowie symmetrischen Spulen ($L_1(x) = L_2(-x)$ und $L_3(x) = L_4(-x)$) folgt entsprechend Gl. (3.39) $I_i(-x_1, -x_2) = -I_i(x_1, x_2)$. Dies bedeutet für die Funktion \tilde{I}_i :

$$\tilde{I}_i(x_d, x_m) = I_i(x_m + \frac{1}{2}x_d, x_m - \frac{1}{2}x_d) = -I_i(-x_m - \frac{1}{2}x_d, -x_m + \frac{1}{2}x_d) = -\tilde{I}_i(-x_d, -x_m) .$$

Somit verschwinden die geraden partiellen Ableitungen und der Wert von \tilde{I}_i bei $x_d = 0$ und $x_m = 0$:

$$\frac{\partial^{s+t} \tilde{I}_i}{\partial x_d^s \partial x_m^t}(0, 0) = 0 \quad \text{für } s+t = 0, 2, 4, \dots \quad (3.59)$$

Die Taylor-Reihe hat damit die Form:

$$\begin{aligned} \tilde{I}_i(x_d, x_m) &= \frac{\partial \tilde{I}_i}{\partial x_d}(0, 0) \cdot x_d + \frac{\partial \tilde{I}_i}{\partial x_m}(0, 0) \cdot x_m + \frac{\partial^3 \tilde{I}_i}{\partial x_d^3}(0, 0) \cdot \frac{x_d^3}{6} \\ &+ \frac{\partial^3 \tilde{I}_i}{\partial x_d^2 \partial x_m}(0, 0) \cdot \frac{x_d^2 x_m}{2} + \frac{\partial^3 \tilde{I}_i}{\partial x_d \partial x_m^2}(0, 0) \cdot \frac{x_d x_m^2}{2} + \frac{\partial^3 \tilde{I}_i}{\partial x_m^3}(0, 0) \cdot \frac{x_m^3}{6} + \dots \end{aligned} \quad (3.60)$$

Der Ausdruck $\frac{\partial \tilde{I}_i}{\partial x_m}(0, 0)$ läßt sich durch den Abgleich der eingespeisten Ströme unterdrücken. Die höheren Ableitungen von \tilde{I}_i sind aber für die meisten Induktivitätsverläufe von Null verschieden. Besonders unangenehm für den beabsichtigten Einsatz des Detektors sind dabei die beiden hinteren Ausdrücke. Die Relativbewegung der beiden Körper x_d kann man klein halten, wenn man die Körper hinreichend gut abbremst und dafür sorgt, daß die Schwerpunkte übereinstimmen. Die gemeinsame Bewegung der Körper x_m dürfte jedoch wegen der Restbeschleunigung der Kapsel und der Vibrationen deutlich größere Werte als x_d annehmen.

Induktivitätsverlauf

Es soll daher erneut versucht werden, Induktivitätsverläufe $L_1(x)$ und $L_3(x)$ zu finden, die über den gesamten Bereich der möglichen Auslenkungen x_1 und x_2 einen Detektor liefern, dessen Ausgangssignal proportional zu x_d ist. Als Ansatz für die Kehrwerte der Induktivitäten verwendet man:

$$G_1(x_1) = \sum_{i=0}^N a_i x_1^i, \quad G_2(x_1) = \sum_{i=0}^N (-1)^i a_i x_1^i, \quad G_3(x_2) = \sum_{i=0}^N b_i x_2^i, \quad G_4(x_2) = \sum_{i=0}^N (-1)^i b_i x_2^i,$$

wobei a_i und b_i Konstanten sind, die im folgenden näher bestimmt werden sollen. Als Ansatz für den Strom wählt man $I_i(x_1, x_2) = \hat{I}_i \cdot x_d = \hat{I}_i x_1 - \hat{I}_i x_2$, wobei \hat{I}_i die Empfindlichkeit gegen gegen differentielle Verschiebung ist. Da der Ansatz für alle (x_1, x_2) gelten soll, muß er auch gelten, wenn man $x_2 = 0$ setzt. Setzt man dies in Gl. (3.39) ein und führt wie in Abschnitt 3.3.4 einen Koeffizientenvergleich durch, so erhält man:

$$\hat{I}_i L_i(2a_0 + 2b_0 + G_i) = 2\Phi_1 a_1, \quad 2\hat{I}_i L_i a_{2p} = 2\Phi_1 a_{2p+1} \quad \text{für } p > 0. \quad (3.61)$$

Untersucht man das Problem für $x_1 = 0$, so folgt:

$$-\hat{I}_i L_i (2a_0 + 2b_0 + G_i) = 2\Phi_3 b_1, \quad -2\hat{I}_i L_i b_{2p} = 2\Phi_3 b_{2p+1} \quad \text{für } p > 0. \quad (3.62)$$

Untersucht man Gl. (3.39) für beliebige Positionen x_1 und x_2 und berücksichtigt man die Beziehungen (3.61) und (3.62), so stellt man fest, daß für $k > 1$ $a_k = b_k = 0$ ist.

Damit haben die erforderlichen Induktivitäten für einen linearen Detektor die Form:

$$L_1 = \frac{1}{a_0 + a_1 x}, \quad L_2 = \frac{1}{a_0 - a_1 x}, \quad L_3 = \frac{1}{b_0 + b_1 x}, \quad L_4 = \frac{1}{b_0 - b_1 x}. \quad (3.63)$$

Die Koeffizienten a_0 , a_1 , b_0 und b_1 können frei gewählt werden, wobei natürlich $a_0 > 0$ und $b_0 > 0$ sein müssen, da negative Induktivitäten physikalisch sinnlos sind. Weiterhin müssen $a_1 \neq 0$ und $b_1 \neq 0$ sein. Der erforderliche Strom der in die einzelnen Kreise eingespeist werden muß, um einen Differenzdetektor mit der angestrebten Empfindlichkeit \hat{I} zu erhalten, ergibt sich aus Gl. (3.61) bzw. Gl. (3.62):

$$I_{0a} = \hat{I}_i L_i (a_0 + b_0 + \frac{1}{2} L_i^{-1}) a_0 / a_1, \quad I_{0b} = -\hat{I}_i L_i (a_0 + b_0 + \frac{1}{2} L_i^{-1}) b_0 / b_1. \quad (3.64)$$

Empfindlichkeit

Setzt man die Ansätze Gl. (3.63) in Gl. (3.39) ein, so erhält man:

$$I_i(x_1, x_2) = \frac{(\Phi_1 - \Phi_2)a_0 + (\Phi_3 - \Phi_4)b_0}{L_i(2a_0 + 2b_0 + L_i^{-1})} + \frac{(\Phi_1 + \Phi_2)a_1}{L_i(2a_0 + 2b_0 + L_i^{-1})} \cdot x_1 + \frac{(\Phi_3 + \Phi_4)b_1}{L_i(2a_0 + 2b_0 + L_i^{-1})} \cdot x_2. \quad (3.65)$$

Der Strom hängt also auch bei asymmetrischer Flußverteilung linear von x_1 und x_2 ab. Allerdings besitzt I_i in diesem Fall einen Offset und ist auch gegenüber gemeinsamen Verschiebungen der Körper empfindlich. Ist $\Phi_1 = \Phi_2$ und $\Phi_3 = \Phi_4$, so verschwindet der Offset. Gleicht man zusätzlich die Flüsse in den Spulen ab ($\Phi_1 a_1 = -\Phi_3 b_1$), so gilt:

$$I_i(x_1, x_2) = \frac{2\Phi_1 a_1}{L_i(2a_0 + 2b_0 + L_i^{-1})} \cdot (x_1 - x_2), \quad (3.66)$$

d.h. das Ausgangssignal des Detektors ist proportional zu x_d und unempfindlich gegenüber x_m .

Kraft

Betrachtet man die Gl. (3.51), so erkennt man, daß der Nenner des Bruches für den gewählten Ansatz (3.63) gleich $L_i(2a_0 + 2b_0 + L_i^{-1})$, also konstant ist. Da die Kehrwerte der Induktivitäten linear von x_1 bzw. x_2 abhängen, ist der Zähler in Gl. (3.51) ein Polynom zweiten Grades von x_1 und x_2 . Damit hat die Energie die Form:

$$E = E_0 - F_{01}x_1 - F_{02}x_2 + \frac{K_1}{2}x_1^2 + \frac{K_2}{2}x_2^2 + K_3x_1x_2, \quad (3.67)$$

mit den konstanten Koeffizienten E_0 , F_{01} , F_{02} , K_1 , K_2 und K_3 . Dies gilt auch dann, wenn die Flüsse asymmetrisch verteilt sind. Die Kräfte hängen unabhängig von der Auslenkung stets

linear von x_1 und x_2 ab. Für symmetrische Flußverteilungen ($\Phi_1 = \Phi_2$ und $\Phi_3 = \Phi_4$) folgt entsprechend der Gln. (3.55), (3.56) und (3.58) für die Federkonstanten:

$$K_1 = -\frac{4a_1^2\Phi_1^2}{2a_0 + 2b_0 + L_i^{-1}}, \quad K_2 = -\frac{4b_1^2\Phi_3^2}{2a_0 + 2b_0 + L_i^{-1}}, \quad K_3 = -\frac{4a_1b_1\Phi_1\Phi_3}{2a_0 + 2b_0 + L_i^{-1}}. \quad (3.68)$$

Bei einem abgeglichenen Detektor ($\Phi_1a_1 = -\Phi_3b_1$) ist $K_1 = K_2 = -K_3$. Dies bedeutet für die Kraft auf die Körper 1 bzw. 2:

$$F_1(x_1, x_2) = -F_2(x_1, x_2) = -K_1 \cdot (x_1 - x_2) = -K_1 \cdot x_d. \quad (3.69)$$

Die Kraft hängt bei abgeglichenem Detektor also nur von der Differenz der Positionen der Körper x_d ab, jedoch nicht von x_m . Die Körper sind damit für alle Positionen x_1 und x_2 von den Bewegungen der äußeren Kapsel, die x_1 und x_2 in gleicher Weise ändern, entkoppelt. Dies gilt jedoch nur, wenn die Induktivitäten tatsächlich den Ansätzen (3.63) entsprechen und die Flüsse korrekt abgeglichen sind.

Da $K_1 < 0$ und somit $K_3 > 0$ ist, bewirkt eine Auslenkung von Körper 2 nach oben eine Beschleunigung des Körpers 1 nach unten. Die beiden Körper driften also bei kleinen Anfangsabweichungen x_d mit zeitlich exponentiell wachsendem Abstand auseinander.

3.5 Detektor mit direkter Rückkopplung

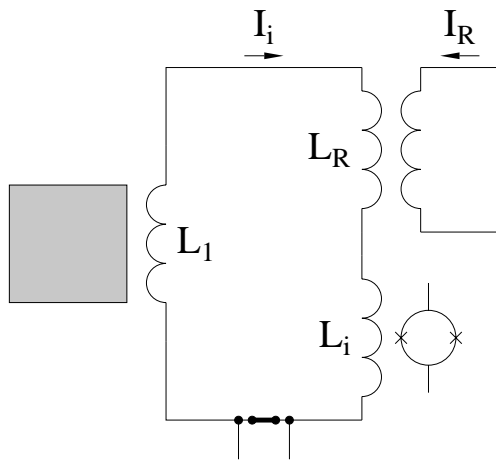
3.5.1 Vorbetrachtungen

Wie in den vorangehenden Kapiteln gezeigt wurde, benötigt man für die dortigen Detektoren einen Induktivitätsverlauf, der der Beziehung $L(x) = 1/(a_0 + a_1x)$ entspricht, um einen linearen Detektor zu erhalten. Ein solcher Induktivitätsverlauf läßt sich nur sehr schwer für einen größeren Positionsbereich realisieren. Er bedeutet nämlich unter anderem, daß die abstoßende Kraft bei Annäherung des Körpers abnimmt. Bei Flachspulen, die sich parallel zur Normalen der einer supraleitende Platte bewegen, nimmt dagegen die Kraft zu (siehe Kap. 4). Für Tauchspulen und Anordnungen, bei denen sich die supraleitende Fläche parallel zu den Drähten der Detektorspule bewegt, läßt sich zwar der erforderliche Induktivitätsverlauf für einen kleinen Positionsbereich erzeugen, jedoch ist in diesem Bereich die Ableitung dL/dx und somit die Empfindlichkeit des Detektors gering. Die maximalen Werte für dL/dx treten nämlich dort auf, wo d^2L/dx^2 verschwindet. In diesem Bereich kann die Induktivität näherungsweise durch die Formel $L(x) = L_0 - \hat{L}x$ (mit $\hat{L} = const.$) beschrieben werden.

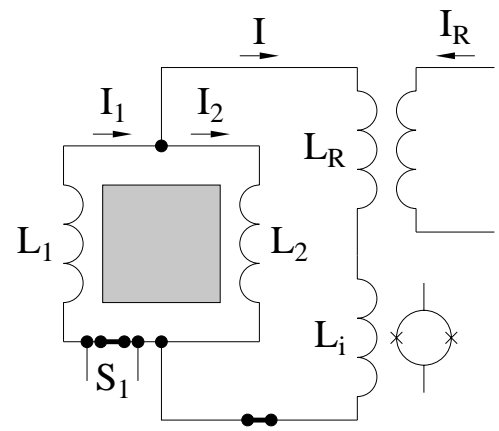
Im folgenden sollen daher Detektoren betrachtet werden, die für einen linearen Induktivitätsverlauf der Detektorspulen ein Ausgangssignal liefern, das linear von der Position des Körpers abhängt.

3.5.2 Schaltung

Der Aufbau der Anordnung (Abb. 3.4(b)) entspricht der Variante ohne direkte Rückkopplung, wobei ein zusätzlicher Rückkoppeltrafo mit supraleitender Sekundärwicklung zur Eingangsspule



(a) Detektor mit einer Detektorspule



(b) Detektor mit 2 Detektorspulen

Abbildung 3.4: Positionsdetektoren mit direkter Rückkopplung

des SQUIDs in Reihe geschaltet wurde. Durch einen Strom I_R kann die Flußverteilung im Rest der Schaltung beeinflußt werden. Aufgrund der Flußerhaltung und des Knotensatzes gilt für den Detektor:

$$\begin{aligned}\Phi_I &= I_1 L_1 + I_i L_i + I_i L_R + I_R M_R, & \Phi_{II} &= I_2 L_2 - I_i L_i - I_i L_R - I_R M_R, \\ I_i &= I_1 - I_2,\end{aligned}\tag{3.70}$$

wobei Φ_I und Φ_{II} die eingefrorenen Flüsse in den Maschen aus Detektorspule, Trafo und SQUID-Eingangsspule sind. Die SQUID-Eingangsspule hat die Induktivität L_i , während der Trafo die Induktivität L_R (Sekundärwicklung) und die Gegeninduktivität M_R besitzt. Durch die Steuerelektronik wird der Strom I_R durch die Primärseite des Rückkoppeltrafos so geregelt, daß der Strom in der SQUID-Eingangsspule I_i konstant gehalten wird. Der dazu erforderliche Rückkoppelstrom dient als Maß für die Position des Testkörpers. Um eine möglichst geringe Rückwirkung des Detektors auf den Testkörper zu erreichen, sollte man anstreben, daß $I_i = 0$ ist. Damit gilt $I_1 = I_2$. Unter Berücksichtigung dieser Beziehung ergibt sich als Lösung des Gleichungssystems (3.70):

$$I_R = \frac{\Phi_I L_2 - \Phi_{II} L_1}{(L_1 + L_2) M_R} = \frac{L_2 - L_1}{L_1 + L_2} \cdot \frac{\Phi_I + \Phi_{II}}{2 M_R} + \frac{\Phi_I - \Phi_{II}}{2 M_R}.\tag{3.71}$$

Damit folgt für die Empfindlichkeit:

$$\frac{dI_R}{dx} = \frac{L'_2 L_1 - L'_1 L_2}{(L_1 + L_2)^2} \cdot \frac{\Phi_I + \Phi_{II}}{M_R}.\tag{3.72}$$

Die Empfindlichkeit hängt somit nicht von den Induktivitäten L_i und L_R ab.

Der einfachste Induktivitätsverlauf, der einen linearen Detektor liefert, ist eine lineare Abhängigkeit zwischen Induktivität und Position:

$$L_1(x) = L_0 + \hat{L}x, \quad L_2 = L_0 - \hat{L}x.\tag{3.73}$$

Wegen $I_1 = I_2$ und Gl. 4.2 heben sich dann auch die Kräfte der Detektorspulen auf den Körper gegenseitig auf. Hat man einen Strom I_0 über dem supraleitenden Schalter S_1 eingespeist, als sich der Körper in der Mittellage befand und der zweite Schalter geöffnet war, so gilt für die beiden Flüsse $\Phi_I = \Phi_{II} = I_0 L_0$. Damit ergibt sich der Rückkoppelstrom:

$$I_R = -\frac{\hat{L}}{M_R} \cdot I_0 \cdot x, \quad (3.74)$$

also der gewünschte lineare Zusammenhang zwischen Position und Ausgangssignal. Wie erwartet, läßt sich die Empfindlichkeit durch Erhöhung des eingespeisten Stromes und durch Verringern der Gegeninduktivität des Trafos M_R vergrößern. Der Absolutwert der Empfindlichkeit ist jedoch in der Regel von untergeordneter Bedeutung, da das Ausgangssignal der Steuerelektronik weiter verstärkt werden kann. Es muß natürlich eine gewisse Mindestempfindlichkeit vorhanden sein, da der maximale Ausgangsstrom der Steuerelektronik begrenzt ist. Andererseits darf z.B. M_R nicht zu groß sein, da sonst eingefangene Störungen auf der Rückkoppelleitung oder das Rauschen der Steuerelektronik einen zu großen Einfluß auf das Positionssignal haben. Viel wichtiger ist das Auflösungsvermögen des Detektors. Da sich das Funktionsprinzip geändert hat, weichen die Betrachtungen zum Auflösungsvermögen von denen bei den vorangehenden Detektoren ab.

Bei der Ermittlung des Auflösungsvermögens soll angenommen werden, daß dieses nur durch das Rauschen der Ausgangsspannung des SQUIDs begrenzt ist. Die Regelschleife der Elektronik ist bemüht, den Fluß im SQUID Φ_{SQ} auf einem konstanten Wert zu halten. Liefert das SQUID aufgrund des Rauschens einen um $-d\Phi_{SQ}$ falschen Wert, so versucht die Regelung, diese Abweichung auszuregeln, indem der Rückkoppelstrom um dI_R und damit der Strom in der SQUID-Eingangsspule um dI geändert wird. Die Änderungen dI und dI_R sind über die Beziehung:

$$0 = dI \left(\frac{L_1 L_2}{L_1 + L_2} + L_R + L_i \right) + dI_R M_R \quad (3.75)$$

miteinander verknüpft, da der rückgekoppelte Fluß $dI_R M_R$ wegen der Flußerhaltung durch eine Änderung der Flüsse in den Spulen L_i , L_R und der Parallelschaltung aus L_1 und L_2 ausgeglichen wird.

Die Stromänderung in der SQUID-Eingangsspule und die Flußänderung im SQUID-Ring sind über die Beziehung:

$$d\Phi_{SQ} = dI \cdot M_{SQ} = dI \cdot k_{SQ} \sqrt{L_i L_{SQ}} \quad (3.76)$$

verbunden, wobei M_{SQ} die Gegeninduktivität und k_{SQ} der Kopplungskoeffizient zwischen der Eingangsspule des SQUIDs und dem SQUID-Ring mit der Induktivität L_{SQ} sind.

Damit gilt für den Strom dI_R , der notwendig ist, um eine Flußänderung von $d\Phi_{SQ}$ zu kompensieren:

$$dI_R = -\frac{L_i + L_R + (L_1^{-1} + L_2^{-1})^{-1}}{L_R k \sqrt{L_i L_{SQ}}} d\Phi_{SQ}. \quad (3.77)$$

Die durch das Rauschen hervorgerufene Abweichung dI_R entspricht dabei einer Bewegung von dx :

$$dx = -dI_R \cdot \left(\frac{dI_R}{dx} \right)^{-1} = \frac{L_i + L_R + (L_1^{-1} + L_2^{-1})^{-1}}{I_0 \hat{L} k \sqrt{L_i L_{SQ}}} d\Phi. \quad (3.78)$$

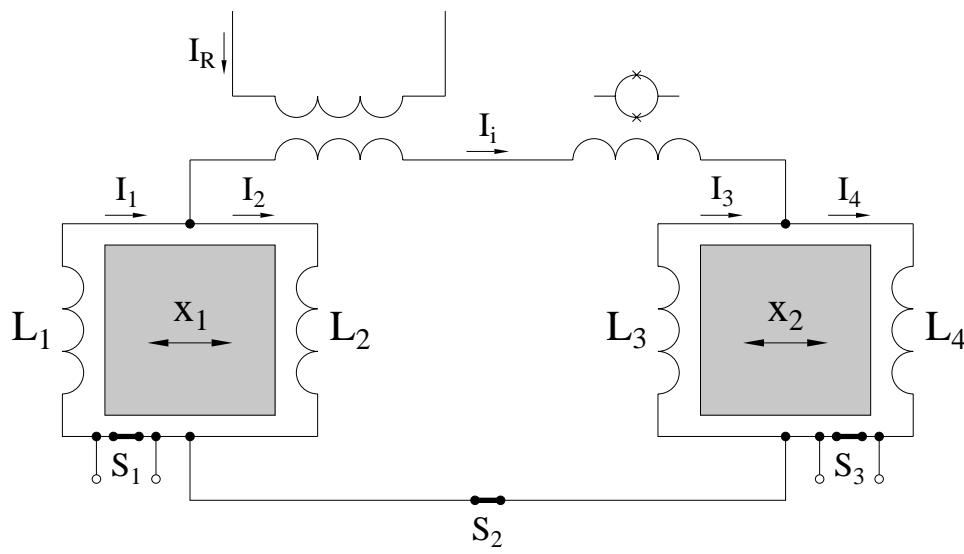


Abbildung 3.5: Differenzdetektor mit direkter Rückkopplung

Daraus folgt für das Positionsaufhebungsvermögen des Detektors δx :

$$\delta x = \left| \frac{L_i + L_R + (L_1^{-1} + L_2^{-1})^{-1}}{I_0 \hat{L} k \sqrt{L_i L_{SQ}}} \right| \cdot \delta \Phi . \quad (3.79)$$

wobei $\delta \Phi$ das rauschbegrenzte Flußauflösungsvermögen des SQUIDs ist.

Das Auflösungsvermögen ist somit umgekehrt proportional zum Strom in den Detektorspulen und zur Ableitung der Induktivität nach der Position \hat{L} . Weiterhin sieht man, daß das Auflösungsvermögen proportional zur Gesamtinduktivität (Summe) aus L_i , L_R und der Parallelschaltung der Induktivitäten L_1 und L_2 ist. Damit verschlechtert sich das Auflösungsvermögen mit wachsendem L_R . Man sollte daher dafür sorgen, daß L_R möglichst klein ist. Ab einem Wert von $L_R \lesssim 0,1 L_i$ ist die Verschlechterung jedoch vernachlässigbar.

Analog zu Kapitel 3.2 wäre auch ein Detektor mit einer einzelnen Detektorspule möglich, der zur Vollständigkeit in Abb. 3.4(a) dargestellt ist. Auch hier wird der Strom, der durch das SQUID fließt, konstant gehalten, allerdings muß dieser Strom ungleich Null sein, da sonst die Empfindlichkeit verschwindet. Für einen linearen Induktivitätsverlauf ergibt sich auch hier ein linearer Detektor. Wegen der Rückwirkung auf den Körper ist die rückwirkungsärmere Variante mit zwei Detektorspulen vorzuziehen.

3.6 Differenzdetektor mit Rückkopplung

Analog zu der in Kapitel 3.4 vorgestellten Variante läßt sich auch ein Differenzdetektor konstruieren, bei dem der Strom direkt in den Detektorkreis zurückgekoppelt wird. Eine Möglichkeit, die Ströme in sämtlichen Detektorspulen mit einem einzelnen Rückkoppeltrafo konstant zu halten, ist in Abb. 3.5 dargestellt. Um eine möglichst geringe Rückwirkung des Detektors auf die Körper zu erzielen, sollte die Steuerelektronik auch hier den Rückkoppelstrom so regeln, daß $I_i = 0$ ist.

Da die allgemeine Herleitung relativ umfangreiche Zwischenergebnisse liefert, sollen hier

nur symmetrische Spulen mit einem linearen Induktivitätsverlauf untersucht werden, wobei sich der Induktivitätsverlauf der Spulen, die zu unterschiedlichen Körpern gehören, durchaus unterscheiden darf. Die Induktivitäten entsprechen damit dem Ansatz:

$$L_1 = L_a + \hat{L}_a x_1, \quad L_2 = L_a - \hat{L}_a x_1, \quad L_3 = L_b + \hat{L}_b x_2, \quad L_4 = L_b - \hat{L}_b x_2, \quad (3.80)$$

wobei L_a und L_b die Induktivitäten der jeweiligen Detektorspulen bei Mittellage des Körpers ($x_1 = 0$ bzw. $x_2 = 0$) und \hat{L}_a und \hat{L}_b die jeweiligen Ableitungen der Induktivitätsverläufe nach x_1 bzw. x_2 sind.

In der Ausgangslage wird über Schalter S_1 der Strom I_{0a} und über Schalter S_3 der Strom I_{0b} eingespeist. Die Steuerelektronik sorgt nach dem Schließen der Schalter durch einen Rückkoppelstrom I_R dafür, daß der Strom in der SQUID-Eingangsspule L_i konstant bei $I_i = 0$ gehalten wird. Damit gilt für die Ströme in den Detektorspulen $I_1 = I_2$ und $I_3 = I_4$. Wegen der Flußerhaltung in den Maschen gilt:

$$I_1 L_1 + I_2 L_2 = 2\Phi_a, \quad I_3 L_3 + I_4 L_4 = 2\Phi_b, \quad I_1 L_1 + M_R L_R - I_3 L_3 = \Phi_a - \Phi_b, \quad (3.81)$$

wobei $\Phi_a = I_{0a} \cdot L_a$ bzw. $\Phi_b = I_{0b} \cdot L_b$ ist. Verwendet man die in Gl. (3.80) angegebenen Ansätze für den Induktivitätsverlauf, so ergibt sich :

$$I_1 = I_2 = I_{0a} = \text{const} \quad \text{bzw.} \quad I_3 = I_4 = I_{0b} = \text{const} \quad (3.82)$$

und man erhält für den Rückkoppelstrom:

$$I_R = \frac{I_{0b} \hat{L}_b x_2 - I_{0a} \hat{L}_a x_1}{M_R}. \quad (3.83)$$

Gleicht man die eingespeisten Ströme entsprechend dem Verhältnis der Induktivitätsänderungen \hat{L}_a bzw. \hat{L}_b ab:

$$I_{0a} \cdot \hat{L}_a = I_{0b} \cdot \hat{L}_b, \quad (3.84)$$

so erhält man einen Detektor, dessen Signal linear von der Verschiebung der beiden Körper zueinander abhängt:

$$I_R = -\frac{\hat{L}_a}{L_R} \cdot I_{0a} \cdot (x_1 - x_2). \quad (3.85)$$

Die Kräfte auf die beiden Testkörper kompensieren sich bei eingeschwungener Regelschleife, da nämlich $I_1 = I_2$ und $dL_1/dx = -dL_2/dx = \hat{L}_a$ bzw. $I_3 = I_4$ und $dL_3/dx = -dL_4/dx = \hat{L}_b$ ist (siehe Gl. (4.2)). Die Körper sind somit untereinander und gegenüber dem Detektor entkoppelt. Dazu muß der Strom in der SQUID-Eingangsspule jedoch tatsächlich auf 0 gehalten werden. Tritt auf Grund des Rauschens ein positiver Strom I_i in der SQUID-Eingangsspule auf, so bedeutet dies, daß $I_1 > I_2$ und $I_3 < I_4$ ist. Unter der Annahme $I_{0a} > 0$ und $I_{0b} > 0$ folgt daraus, daß der eine Körper in Richtung Spule L_2 und der andere Körper in Richtung Spule L_3 beschleunigt wird. Es erfolgen also Beschleunigungen in entgegengesetzte Richtungen.

3.7 SQUID-Elektronik

3.7.1 Vorbetrachtungen

Die Ansteuerelektronik ist ein wichtiger Bestandteil des Meßsystems und nimmt Einfluß auf das erhaltene Meßsignal. Für viele Anwendungen kann man den Einfluß der Kombination aus SQUID und Ansteuerelektronik vernachlässigen. Man kann dabei annehmen, daß die Elektronik - abgesehen vom Rauschen - den korrekten Wert für den Fluß im SQUID anzeigt.

Bei den von uns durchgeführten Experimenten werden jedoch erhöhte Anforderungen an den Detektor gestellt. Einerseits wird eine hohe Genauigkeit verlangt, so daß auch kleine dynamische Fehler der Regelschleife der SQUID-Elektronik einen Einfluß auf das Meßergebnis haben. Zum anderen wird die Elektronik während der Phase der Positionierung der Testkörper und bei einigen der vorbereitenden Experimente am Rande ihrer Leistungsfähigkeit betrieben.

Um die Ergebnisse der Experimente besser zu verstehen, wurden mit Hilfe eines einfachen Modells das dynamische Verhalten der Elektronik untersucht. Die Untersuchungen können bei späteren Experimenten auch dazu dienen, den Einfluß der Elektronik auf das Meßergebnis abzuschätzen. Da die Hauptkomponenten des Positionssignals im niederfrequenten Bereich bis ca. 10 Hz liegen, jedoch relativ große Anstiegsraten aufweisen, konzentrieren sich die Untersuchungen auf das Verhalten der Elektronik bei linear ansteigenden Signalen.

3.7.2 Aufbau

Die von uns verwendete SQUID-Elektronik beruht auf dem sogenannten *flux locked loop* Verfahren mit Flußmodulation [62]. Dabei wird durch die Steuerelektronik ein Fluß Φ_R auf das SQUID zurückgekoppelt und damit der Fluß im SQUID-Ring konstant gehalten. Das SQUID UJ111 hat zu diesem Zweck eine integrierte Rückkoppelspule. Eine Änderung des externen Flusses führt damit zu einer betragsgleichen Änderung des rückgekoppelten Flusses und damit zu einer proportionalen Änderung der Ausgangsspannung der Elektronik. Das SQUID dient dabei als hochempfindlicher Nulldetektor für die Flußkompensation.

Um Abweichungen des Flusses innerhalb des SQUID-Ringes möglichst genau zu detektieren, ist dem rückgekoppeltem Fluß ein modulierte Signal überlagert, das zu einer Modulation der Ausgangsspannung des SQUIDs führt. Diese wird rauscharm verstärkt und mit Hilfe eines Phasenempfindlichen Detektors (PED) ausgewertet, der mit der Modulationsfrequenz oder einer Harmonischen der Modulationsfrequenz betrieben wird. Die Ausgangsspannung des PED hängt dabei vom mittleren Fluß im SQUID ab (siehe nächster Abschnitt). Ein anschließender Integrator regelt den rückgekoppelten Fluß so lange nach, bis die Ausgangsspannung des PED verschwindet, also das SQUID seinen Arbeitspunkt erreicht hat.

3.7.3 Modell

Im folgenden soll ein vereinfachtes Modell für die Ausgangsspannung der SQUID-Elektronik in Abhängigkeit vom externen Fluß aufgestellt werden. Die Spannung über dem SQUID U kann

durch die folgende vereinfachte Beziehung beschrieben werden (siehe 2.4):

$$U(\Phi) = U_1 + U_m \cos \left[2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0} \right] , \quad (3.86)$$

wobei Φ der Fluß im SQUID, Φ_0 das Flußquant und U_m der halbe Modulationshub des SQUIDs beim gewählten Biasstrom ist. Im folgenden sind alle Flüsse mit einem Dach über dem Symbol auf das Flußquant normiert ($\hat{\Phi} = 2\pi \cdot \frac{\Phi}{\Phi_0}$). Der Fluß im SQUID setzt sich aus einem externen Fluß $\hat{\Phi}_e$, dem rückgekoppelten Fluß $\hat{\Phi}_R$ und der Flußmodulation $\hat{\Phi}_m$ zusammen. Weiterhin soll für die folgenden Rechnungen eine Größe $\hat{\Phi}_B$ für die Summe aus externem und rückgekoppeltem Fluß eingeführt werden:

$$\hat{\Phi} = \hat{\Phi}_e + \hat{\Phi}_R + \hat{\Phi}_m , \quad \hat{\Phi}_B = \hat{\Phi}_e + \hat{\Phi}_R . \quad (3.87)$$

Für den modulierten Fluß wird eine Sinusschwingung angesetzt⁴:

$$\hat{\Phi}_m(t) = \hat{\Phi}_A \cdot \sin(\omega_m t) , \quad (3.88)$$

wobei ω_m die Modulationsfrequenz ist und $\hat{\Phi}_A$ die Modulationsamplitude. Damit ergibt sich aus den Gln. (3.86)–(3.88):

$$\begin{aligned} U &= U_1 + U_m \cos[\hat{\Phi}_B + \hat{\Phi}_A \sin(\omega_m t)] \\ &= U_1 + U_m \cos \hat{\Phi}_B \cdot \cos[\hat{\Phi}_A \sin(\omega_m t)] - U_m \sin \hat{\Phi}_B \cdot \sin[\hat{\Phi}_A \sin(\omega_m t)] \\ &= U_1 + U_m \cdot \cos \hat{\Phi}_B \cdot u_a(t) - U_m \cdot \sin \hat{\Phi}_B \cdot u_b(t) . \end{aligned} \quad (3.89)$$

Die beiden Ausdrücke $u_a(t)$ und $u_b(t)$ lassen sich in Fourierreihen entwickeln:

$$u_a(t) = \cos[\hat{\Phi}_A \sin(\omega_m t)] = J_0(\hat{\Phi}_A) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(\hat{\Phi}_A) \cos[2n\omega_m t] \quad (3.90)$$

$$\text{bzw.} \quad u_b(t) = \sin[\hat{\Phi}_A \sin(\omega_m t)] = 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(\hat{\Phi}_A) \sin[(2n-1)\omega_m t] , \quad (3.91)$$

wobei J_n die Besselfunktionen n -ter Ordnung sind. Wie man sieht, enthält u_a nur geradzahlige und u_b nur ungeradzahlige Harmonische der Modulationsfrequenz. Abhängig vom Fluß $\hat{\Phi}_B$ können entsprechend Gl. (3.89) entweder die geradzahligen ($\hat{\Phi}_B = (n + 1/2)\pi$) oder die ungeradzahligen Harmonischen ($\hat{\Phi}_B = n\pi$) in der SQUID-Spannung unterdrückt werden.

Die verstärkte SQUID-Spannung wird mit Hilfe eines PED ausgewertet, der mit der Modulationsfrequenz betrieben wird. Im hier verwendeten vereinfachten Modell multipliziert der PED die Eingangsspannung mit dem Modulationssignal⁵ und unterdrückt im erhaltenen Produkt alle Frequenzen oberhalb von ω_{max} ($\omega_{max} < \omega_m$). Damit erhält man:

$$U_{PED} = [V \cdot \sin(\omega t) \cdot [U_1 + U_m \cos \hat{\Phi}_B \cdot u_a - U_m \sin \hat{\Phi}_B \cdot u_b]]_{|\omega| < \omega_{max}} , \quad (3.92)$$

⁴In der Praxis zeigt sich, daß Modulationssignale mit höheren Harmonischen, wie z.B. Rechteckschwingungen, bessere Resultate für Auflösungsvermögen und maximale Anstiegsrate des Signals liefern können.

⁵Bei realen PEDs wird die Eingangsspannung häufig im Takt mit der Modulationsfrequenz umgepolt, d.h. mit einer Rechteckschwingung multipliziert.

wobei V die Gesamtverstärkung ist, die sich aus den Verstärkungen von Vorverstärker und PED zusammensetzt.

Im folgenden soll der Fall betrachtet werden, daß $\hat{\Phi}_B$ konstant ist oder sich nur langsam ändert. Wegen:

$$2 \sin(\omega_m t) \cdot \sin[(2n-1)\omega_m t] = \cos[(2n-2)\omega_m t] - \cos[2n\omega_m t] \quad (3.93)$$

$$\text{und} \quad 2 \sin(\omega_m t) \cdot \cos[2n\omega_m t] = \sin[(2n+1)\omega_m t] - \sin[(2n-1)\omega_m t] \quad (3.94)$$

liefert nur der erste Summand von u_b einen Beitrag zum Signal des PED, während alle anderen Frequenzkomponenten oberhalb von ω_{max} liegen. Damit folgt:

$$U_{PED} = -V \cdot U_m J_1(\hat{\Phi}_A) \sin \hat{\Phi}_B . \quad (3.95)$$

Der Ausgang des PED ist mit einem Integrator verbunden. Das Ausgangssignal U_I des Integrators wird auf das SQUID zurückgekoppelt:

$$U_I = k_I \cdot \int U_{PED} dt , \quad \Phi_R = k_R \cdot U_I , \quad (3.96)$$

wobei k_I und k_R Konstanten sind, die die Dynamik des Integrators bzw. die Stärke der Rückkopplung beschreiben.

Durch Ableitung von Φ_B (siehe Gl. 3.87) und Einsetzen der Gln. (3.95) und (3.96) erhält man die DGL:

$$\frac{d\hat{\Phi}_B}{dt} = \frac{d\hat{\Phi}_e}{dt} + \frac{d\hat{\Phi}_R}{dt} = \frac{d\hat{\Phi}_e}{dt} + k_R \cdot \frac{dU_I}{dt} = \frac{d\hat{\Phi}_e}{dt} - \tilde{K} \sin \hat{\Phi}_B \quad (3.97)$$

mit der Kopplungskonstante des Gesamtsystems $\tilde{K} = k_I k_R V U_m J_1(\hat{\Phi}_A)$.

3.7.4 Linear ansteigendes externes Signal

In diesem Abschnitt soll das Verhalten der SQUID-Elektronik bei einem konstanten oder linear ansteigenden Signal untersucht werden. Dabei soll festgestellt werden, unter welchen Bedingungen der rückgekoppelte Fluß den Anstieg des externen Flusses ausgleichen kann, d.h. die Summe aus externem und rückgekoppeltem Fluß $\hat{\Phi}_B(t) = \hat{\Phi}_s = \text{const.}$ ist. Diese Lösung soll im folgenden stationäre Lösung genannt werden. Für den linear wachsenden externen Fluß verwendet man den Ansatz $\hat{\Phi}_e = \Omega t$ mit der normierten Anstiegsrate Ω . Aus Gl. (3.97) folgt:

$$0 = \Omega - \tilde{K} \cdot \sin \hat{\Phi}_B(t) \quad \rightarrow \quad \sin \hat{\Phi}_s = \frac{\Omega}{\tilde{K}} . \quad (3.98)$$

Damit existieren nur für $|\Omega| < |\tilde{K}|$ stationäre Lösungen:

$$\hat{\Phi}_{s1} = \arcsin \frac{\Omega}{\tilde{K}} + 2n\pi , \quad \hat{\Phi}_{s2} = -\arcsin \frac{\Omega}{\tilde{K}} + (2n+1)\pi . \quad (3.99)$$

Um zu untersuchen, welche der stationären Lösungen stabil ist, definiert man die Abweichung vom stabilen Arbeitspunkt $\hat{\varphi}(t) = \hat{\Phi}_B(t) - \hat{\Phi}_{s1}$. Setzt man dies in Gl. (3.97) ein, so erhält man:

$$\dot{\hat{\varphi}} = \Omega - \tilde{K} \sin(\hat{\Phi}_{s1} + \hat{\varphi}) = \Omega - \tilde{K} \sin \hat{\Phi}_{s1} \cdot \cos \hat{\varphi} - \tilde{K} \cos \hat{\Phi}_{s1} \cdot \sin \hat{\varphi} . \quad (3.100)$$

Unter Berücksichtigung Gl. (3.98) folgt für $\tilde{K} > 0$:

$$\cos \hat{\Phi}_{s1} = \sqrt{1 - \sin^2 \hat{\Phi}_{s1}} = \frac{1}{\tilde{K}} \sqrt{\tilde{K}^2 - \Omega^2} \quad (3.101)$$

und damit:

$$\dot{\hat{\varphi}} = \Omega - \Omega \cos \hat{\varphi} - \sqrt{\tilde{K}^2 - \Omega^2} \cdot \sin \hat{\varphi} . \quad (3.102)$$

Für die Ableitung $d\dot{\hat{\varphi}}/d\hat{\varphi}$ gilt:

$$\frac{d\dot{\hat{\varphi}}}{d\hat{\varphi}} = \Omega \sin \hat{\varphi} - \sqrt{\tilde{K}^2 - \Omega^2} \cdot \cos \hat{\varphi} . \quad (3.103)$$

Die stationäre Lösung $\hat{\Phi}_{s1}$ ist stabil, wenn $d\dot{\hat{\varphi}}/d\hat{\varphi}(0) < 0$ ist, d.h. kleine Abweichungen von der Lösung zu einer Verringerung der Abweichung führen:

$$\frac{d\dot{\hat{\varphi}}}{d\hat{\varphi}}(0) = -\sqrt{\tilde{K}^2 - \Omega^2} . \quad (3.104)$$

Damit sind bei $\tilde{K} > 0$ die Lösungen $\hat{\Phi}_{s1}$ stabil. Die Untersuchung für $\hat{\Phi}_{s2}$ erfolgt analog, wobei in Gl. (3.101) ein Minus vor der Wurzel steht. Diese Lösungen sind damit für $\tilde{K} > 0$ instabil. Ist $\tilde{K} < 0$, so ist es genau umgekehrt.

Die stabilen Lösungen unterscheiden sich also jeweils um 2π oder bezogen auf die nichtnormierten Flüsse um ein Flußquant Φ_0 . Der Anziehungsbereich der stationären Lösungen wird durch die benachbarten instabilen stationären Lösungen begrenzt. Der Anziehungsbereich gibt dabei an, wie groß die Abweichungen sein dürfen, damit das System wieder zum gleichen Arbeitspunkt zurückkehrt. Ist $\Omega \neq 0$, so ist der Arbeitspunkt gegenüber dem Mittelpunkt des Anziehungsbereichs verschoben. Bei einem ansteigenden externen Signal reagiert das System deutlich empfindlicher auf Störungen, die den Fluß weiter erhöhen, als auf Störungen mit umgekehrtem Vorzeichen.

Der Ausdruck $d\dot{\hat{\varphi}}/d\hat{\varphi}$ bestimmt nicht nur die Stabilität der Lösung, sondern auch wie schnell eine Abweichung abgebaut wird. Je größer $d\dot{\hat{\varphi}}/d\hat{\varphi}(0)$ ist, desto schneller geschieht dies. Bei kleinen Abweichungen reagiert das System wie ein RC-Glied, d.h. die Störungen werden exponentiell mit $\exp(d\dot{\hat{\varphi}}/d\hat{\varphi}(0) \cdot t)$ abgebaut.

Ist $|\tilde{K}| < |\Omega|$, so gibt es keine stationären Lösungen. Setzt man den linearen Ansatz für $\hat{\Phi}_e$ in Gl. (3.97) ein, so erhält man nach der Umformung:

$$\frac{d\hat{\Phi}_B}{dt} + \tilde{K} \sin \hat{\Phi}_B = \Omega . \quad (3.105)$$

Dies entspricht der DGL für einen stark gedämpften Josephsonkontakt im RSJ-Modell. Die Dynamik dieser DGL ist gut erforscht. Aus der Lösung der DGL kann man auch auf das Ausgangssignal der SQUID-Elektronik bei $|\Omega| > |\tilde{K}|$ schließen. In diesem Fall ist der mittlere Anstieg der Ausgangsspannung geringer als der Anstieg des externen Feldes, wobei dem monoton ansteigenden Signal der Elektronik eine Schwingung mit vielen Harmonischen überlagert ist, deren Frequenz mit wachsendem Ω zunimmt. Diese Schwingung erschwert es ungemein, von der Ausgangsspannung der SQUID-Elektronik auf den Verlauf des externen Flusses zu schließen.

Schlußfolgerungen

Bei einem linear ansteigenden externen Fluß gilt:

- Es gibt nur stationäre Arbeitspunkte bis zu einer maximalen Anstiegsrate, die von der Kopplungskonstante \tilde{K} abhängt.
- Der Arbeitspunkt hängt von der Anstiegsgeschwindigkeit des Signals ab. Wenn man annimmt, daß die SQUID-Elektronik bei konstantem Fluß einen korrekten Wert liefert, so erhält man bei ansteigendem Signal einen Fehler von $\Phi_s = [\Phi_0/(2\pi)] \arcsin \frac{\Omega}{\tilde{K}}$.
- Tritt zusätzlich zum mäßig ansteigenden Signal ein schneller Sprung im Signal auf, so kehrt die SQUID-Elektronik nur dann zum alten Arbeitspunkt zurück, wenn die Amplitude des Sprunges im Bereich von $[-\Phi_0/2 - 2\Phi_s, \Phi_0/2 - 2\Phi_s]$ liegt. Ansonsten strebt die Elektronik nach dem Sprung einen neuen Arbeitspunkt an. Das Intervall ist asymmetrisch zum Nullpunkt. Dies bedeutet, daß die SQUID-Elektronik bei ansteigendem Signal deutlich empfindlicher auf positive Sprünge reagiert als auf Sprünge mit negativem Vorzeichen.
- Nach kleineren Störungen kehrt die SQUID-Elektronik bei einem sich ändernden externen Signal langsamer zum Arbeitspunkt zurück (Zeitkonstante $\tau = 1/\sqrt{\tilde{K}^2 - \Omega^2}$) als bei konstantem externen Fluß ($\tau = 1/|\tilde{K}|$). Dies gilt unabhängig vom Vorzeichen der Störung.
- Je größer die Kopplungskonstante \tilde{K} ist, desto geringer ist der dynamische Fehler und desto höhere Anstiegsraten sind erlaubt.

3.7.5 Quasistationäre Lösungen

Neben den oben beschriebenen Lösungen kann es bei sehr schnellen Anstiegsraten noch weitere Lösungen geben, die im folgenden untersucht werden sollen. Steigt der Fluß im SQUID linear an, so wird entsprechend Gl. (3.86) eine harmonische Wechselspannung über dem SQUID erzeugt, deren Frequenz proportional zur Anstiegsrate des Flusses ist. Ist der Anstieg schnell genug, so liegt die Frequenz dieser Wechselspannung im Bereich der Modulationsfrequenz der SQUID-Elektronik. Dies führt zu einer Gleichspannung am Ausgang des PED. Durch die Rückkopplung wird dann wiederum der Flußanstieg im SQUID stabilisiert. Diese Lösung soll quasistationäre Lösung genannt werden, da nicht Φ_B sondern nur U_{PED} konstant ist.

Für den Fluß im SQUID wählt man den Ansatz:

$$\hat{\Phi}_B = \omega_m t + \hat{\Phi}_2, \quad (3.106)$$

wobei $\hat{\Phi}_2 = \hat{\Phi}(0)$ eine Phasenverschiebung ist, die sich bei der quasistationären Lösung einstellt. Setzt man Gl. (3.106) in Gl. (3.92) ein, so sieht man, daß nur der Summand mit u_a einen Beitrag zu U_{PED} liefert. Der Ausdruck $u_b \cdot \sin \hat{\Phi}_B$ liefert dagegen geradzahlige Harmonische von ω_m bzw. einen konstanten Offsetwert. Die höheren Harmonischen und der Offsetwert werden

jedoch durch den PED unterdrückt, da dieser nur für die Grundfrequenz empfindlich ist. Für die Berechnung von U_{PED} werden nur die beiden ersten Summanden von u_a benötigt:

$$U_{PED} = [V \cdot U_m \sin(\omega_m t) \cdot \cos \hat{\Phi}_B \cdot (J_0(\hat{\Phi}_A) + 2J_2(\hat{\Phi}_A) \cos(2\omega_m t))]_{|\omega| < \omega_{max}} . \quad (3.107)$$

Unter Nutzung des Additionstheorems für $\cos(\hat{\Phi}_2 + \omega_m t)$ und der Beziehungen für die Produkte der trigonometrischen Funktionen sowie nach dem Entfernen aller Terme mit höheren Harmonischen (wegen des PED) erhält man:

$$U_{PED} = -VU_m \cdot \frac{1}{2} \sin \hat{\Phi}_2 \cdot [J_0(\hat{\Phi}_A) - J_2(\hat{\Phi}_A)] . \quad (3.108)$$

Für die Ableitung von $\hat{\Phi}_R$ gilt damit:

$$\frac{d\hat{\Phi}_R}{dt} = -\frac{1}{2} k_I k_R V U_m [J_0(\hat{\Phi}_A) - J_2(\hat{\Phi}_A)] \sin \hat{\Phi}_2 = -\tilde{K}_2 \sin \hat{\Phi}_2 , \quad (3.109)$$

mit der Kopplungskonstante $\tilde{K}_2 = k_I k_R V U_m [J_0(\hat{\Phi}_A) - J_2(\hat{\Phi}_A)]/2$.

Es soll erneut die Dynamik des Systems bei einem linear ansteigenden externen Fluß $\hat{\Phi}_e = \Omega t$ betrachtet werden. Durch Ableitung von Gl. (3.106) erhält man:

$$\omega_m = \frac{d\hat{\Phi}_B}{dt} = \frac{d\hat{\Phi}_e}{dt} + \frac{d\hat{\Phi}_R}{dt} = \Omega - \tilde{K}_2 \sin \hat{\Phi}_2 . \quad (3.110)$$

Damit gilt für die quasistationäre Lösung:

$$\sin \hat{\Phi}_2 = \frac{\Omega - \omega_m}{\tilde{K}_2} . \quad (3.111)$$

Es gibt also nur für $|\Omega - \omega_m| < |\tilde{K}_2|$ diese Art von quasistationären Lösungen. Für kleine \tilde{K}_2 ist dies nur der Fall, wenn Ω in der Nähe der Modulationsfrequenz liegt. Sind dagegen \tilde{K} und \tilde{K}_2 groß, so können für ein gegebenes Ω sowohl quasistationäre als auch stationäre Lösung stabil sein. Das Verhalten der Elektronik ist damit hysteretisch. Dies kann zu Instabilitäten beim Betrieb führen.

Wenn eine quasistationäre Lösung existiert, so gilt für den rückgekoppelten Fluß $\hat{\Phi}_R$:

$$\hat{\Phi}_R = \hat{\Phi}_B - \hat{\Phi}_e = \hat{\Phi}_2 + [\omega_m - \Omega]t , \quad (3.112)$$

d.h. das Ausgangssignal der SQUID-Elektronik ändert sich linear mit der Zeit. Der Anstieg ist dabei proportional zu $\omega_m - \Omega$ statt zu $-\Omega$ wie beim langsamen Anstieg.

Steigt der externe Fluß noch stärker an, so kann es analoge Lösungen mit $\hat{\Phi}_B = \Phi_k + k\omega_m t$ (mit $k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$) geben. Allerdings wird der Bereich, in denen diese Lösungen stabil sind, mit wachsendem $|k|$ immer kleiner.

3.7.6 Experimentelle Ergebnisse und Schlußfolgerungen

Für die Fallexperimente ist eine SQUID-Elektronik mit einer hohen maximalen Anstiegsrate erforderlich. Dies zeigte sich insbesondere bei den ersten Fallexperimenten, bei denen die Empfindlichkeit nicht gezielt eingestellt werden konnte. Bei diesen Experimenten sollten die

Testkörper Schwingungen zwischen den beiden Tragespulen ausführen. Dabei wurde überprüft, ob der Detektor korrekt arbeite, sich die Körper frei bewegen konnten, und wie groß die Dämpfung der Schwingung war.

Es zeigte sich, daß die erhaltenen Meßkurven auch dann die erwartete Form aufwiesen, wenn die Anstiegsrate der SQUID-Elektronik zwischenzeitlich überschritten wurde. An den Stellen, an denen sich die Bewegungsrichtung des Körpers änderte, geschah dies auch im Positionssignal. Diese Bereiche wurden auch korrekt erfaßt, da dort die Anstiegsrate gering ist. Die Bereiche mit hohen Anstiegsraten lassen sich dagegen nur schwer visuell beurteilen. Erst die Ableitung der Meßkurve zeigte deutliche Abweichungen von der erwarteten Bewegung. Das Positionssignal besaß eine maximale Anstiegsrate. Unterhalb dieser Anstiegsrate erhielt man eine relativ glatte Kurve für die Ableitung, die dem erwarteten Verlauf entsprach. Nahm die Geschwindigkeit des Körpers weiter zu, so zeigte die Anstiegsrate des Positionssignals in eine Art Sättigung, wobei der Verlauf der Ableitung des Positionssignals heftige Schwankungen aufwies. Außerdem traten bei hohen Anstiegsraten häufig Sprünge mit der Differenz Φ_0 im Signalverlauf auf. Bei besonders hohen Anstiegsraten kehrte sich sogar die Richtung des Signalverlaufs um. Dies wurde anfangs fälschlicherweise als Änderung der Bewegungsrichtung des Körpers (Reflexion) interpretiert. Da die SQUID-Elektronik nicht mehr exakt der Änderung des Flusses folgt, war es bei diesen Experimenten auch nicht möglich, die Empfindlichkeit des Detektors korrekt zu bestimmen.

Auf Grund dieser Probleme wurde die SQUID-Elektronik bezüglich höherer Anstiegsraten optimiert [63]. Eine darüber hinausgehende Steigerung der erlaubten Anstiegsrate wäre mit einer Erhöhung der Modulationsfrequenz und damit dem Austausch wichtiger Bauelemente (z.B. Breitbandtrafo im Verstärker, schnellere Operationsverstärker) verbunden [63]. Die weitere Verbesserung der SQUID-Elektronik bleibt also auch in Zukunft eine wichtige Aufgabe.

Die Empfindlichkeit des Positionsdetektors wurde vorläufig durch eine kleine Induktivität parallel zu L_i um den Faktor 10^{-3} – 10^{-2} reduziert [64], um ein Überschreiten der maximalen Anstiegsrate zu verhindern. Der Meßaufbau erhielt eine pneumatische Hebevorrichtung (siehe Kap. 2.5), die es erlaubt, die Empfindlichkeit vor dem Fallexperiment gezielt einzustellen und zu überprüfen. Bei der Auswertung werden die Signale sorgfältig auf Sprünge im Signalverlauf untersucht, die (falls möglich) numerisch unterdrückt werden.

Die Betrachtungen zur Dynamik der SQUID-Elektronik können auch zur Abschätzung des dynamischen Fehlers bei späteren Experimenten herangezogen werden. Allerdings dürfte der Einfluß der reinen SQUID-Elektronik gegenüber dem Einfluß des Ausgangsfilter bzw. des Eingangsfilters des A/D-Wandlers vernachlässigbar sein.

3.8 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

In diesem Kapitel wurden verschiedene Schaltungen für SQUID-basierte Positionsdetektoren diskutiert. Von diesen Detektoren kam die Variante mit einer einzelnen Detektorspule in einem früheren Meßsystem praktisch zum Einsatz. Da der Detektor einige entscheidende Nachteile besitzt, kommen im derzeitigen Meßsystem (siehe 2.5) zwei Positionsdetektoren mit je zwei Detektorspulen zum Einsatz. Die Variante des differentiellen Detektors wurde dagegen noch

nicht praktisch überprüft, da diese Schaltung beim derzeitigen Stand der Experimente keine Vorteile liefert. Diese werden erst wirksam, wenn die differentielle Verschiebung der Körper gegeneinander deutlich kleiner als die Bewegung der Körper gegenüber dem Detektor ist. Jedoch ist unklar, wie gut sich ein solcher Detektor in der Praxis abgleichen läßt und wie groß der lineare Bereich ist. Ein weiterer Grund dafür, daß derzeit für jeden Körper ein eigener Detektor verwendet wird, liegt darin, daß die Positionsdetektoren auch zur Positionsregelung der Körper verwendet werden. Dabei werden die Absolutwerte der Positionen und nicht deren Differenz benötigt. Das Meßsystem ist jedoch so konstruiert, daß die beiden Positionsdetektoren in späteren Versuchen zu einem differentiellen Detektor kombiniert werden können.

Es wurde untersucht, welchen Induktivitätsverlauf die Detektorspulen besitzen müssen, um einen linearen Detektor zu erhalten. Für die in Kap. 3.3 und 3.4 beschriebenen Varianten ergibt sich ein Induktivitätsverlauf der Form $L = 1/(a_0 \pm a_1 x)$ (a_0, a_1 Konstanten), der sich in der Praxis nur schwer über einen größeren Positionsbereich realisieren läßt. Im derzeitigen System werden Positionsdetektoren mit Tauchspulen verwendet, die jedoch nicht hinsichtlich der Linearität optimiert wurden. Sie liefern jedoch eine bessere Linearität als Detektoren mit Flachspulen, bei denen die Empfindlichkeit bei Annäherung an die Spulen deutlich zunimmt. Die genauen Werte für die Linearität des Meßsystems konnten bisher nicht ermittelt werden, da ein entsprechender Vergleichsmaßstab im Meßsystem fehlt.

Besonders ausführlich wurde die Rückwirkung der Detektoren auf die Testkörper untersucht. Diese Problematik wurde in den Publikationen zum STEP-Projekt nicht in der erforderlichen Ausführlichkeit behandelt, da dort andere Versuchsbedingungen auftreten (periodische Anregung) und eine gewisse Rückwirkung (Resonanz mit Umlauffrequenz des Satelliten) sogar erwünscht ist. Da die Federkonstante des Systems jeweils nur für spezielle Induktivitätsverläufe berechnet wurde, entstand der Eindruck, daß ein proportionaler Zusammenhang zwischen dem Quadrat der Empfindlichkeit und der statischen Rückwirkung besteht. Es gab daher Diskussionen mit unseren Kooperationspartnern am ZARM Bremen darüber, ob die geplante Empfindlichkeit in der Theorie erreichbar ist oder durch die Rückwirkung begrenzt wird [65].

Positionsdetektoren mit zwei Detektorspulen besitzen eine Gleichgewichtslage, in der sich die Kräfte der Detektorspulen auf die Testkörper aufheben. Diese entspricht bei symmetrischen Spulen und symmetrischer Flußverteilung der zentrierten Lage des Körpers. Die im Rahmen der Arbeit durchgeführten Rechnungen zeigten, daß diese Rückwirkung sowohl von der ersten Ableitung L' (und somit der Empfindlichkeit) als auch von der zweiten Ableitung der Induktivität L'' abhängt. Um bei gegebener Empfindlichkeit eine möglichst kleine Rückwirkung zu erzielen, sollte L'' möglichst positiv oder zumindest 0 sein. Mit Spulen, für die L'' in einem gewissen Positionsbereich größer als 0 ist, läßt sich theoretisch sogar ein Detektor ohne statische Rückwirkung fertigen, der allerdings nichtlinear ist. Wie gut der Abgleich in der Praxis gelingt ist dagegen ungewiß. Auch für den differentiellen Detektor konnte eine allgemeine Formel zur Bestimmung der Federkonstanten hergeleitet werden. Allerdings waren dort in jedem Fall die Testkörper untereinander gekoppelt. Die hergeleiteten Formeln für die Rückwirkung schlossen die aus der Literatur bekannten Spezialfälle ein und lieferten dort das gleiche Ergebnis.

Bei den aus der Literatur bekannten Detektorschaltungen schloß sich Linearität und die Un-

terdrückung der Rückwirkung gegenseitig aus. Außerdem liefern die im Meßsystem eingesetzten Tauchspulen über weite Bereiche einen nahezu linearen Zusammenhang zwischen Induktivität und Position, der weder zu einem linearen, noch zu einem rückwirkungsfreien Detektor führt. Es wurden daher im Rahmen der Arbeit neue Schaltungsvarianten erarbeitet, die für einen linearen Induktivitätsverlauf einen linearen Detektor liefern, der keine statische Rückwirkung auf die Testkörper ausübt. Dabei kann entweder die Position eines einzelnen Körpers oder die Verschiebung zweier Körper gegeneinander bestimmt werden. Praktische Untersuchungen zu diesen Detektortypen liegen jedoch noch nicht vor. Der Meßaufbau ließe sich jedoch durch den Einsatz eines zusätzlichen Trafos entsprechend umrüsten. Auch die SQUID-Elektronik könnte bei entsprechender Anpassung der Ausgangsströme weiterverwendet werden, wobei sie statt auf die integrierte Rückkoppelspule des SQUIDs auf den zusätzlichen Rückkoppeltrafo wirkt. Wie gut sich die Rückwirkung des Detektors auf den Testkörper in der Praxis unterdrücken läßt, und wie linear der Detektor ist, hängt vor allem von der Linearität des Induktivitätsverlaufes ab. Für die im Meßsystem eingesetzten Spulen liegen jedoch keine Meßwerte vor.

Bei den bisher durchgeführten Fallexperimenten zeigte der eingesetzte Detektor eine ausreichende Linearität. Auch die Rückwirkung des Detektors konnte wegen der reduzierten Empfindlichkeit noch nicht nachgewiesen werden. Für spätere Experimente könnte der Detektor mit direkter Rückkopplung jedoch vorteilhaft sein.

Induktivitätsverläufe

4.1 Vorbetrachtungen

In diesem Kapitel sollen Induktivitätsverläufe und Kräfte verschiedener einfacher Kombinationen von supraleitenden Flächen und supraleitenden Drahtspulen untersucht werden. Dabei wird angenommen, daß die Londonsche Eindringtiefe vernachlässigbar ist. Es fließt also ein Oberflächenstrom in einer infinitesimal dünnen Schicht, der dazu führt, daß die senkrechte Komponente des magnetischen Feldes in der Nähe der Oberfläche des Supraleiters verschwindet. Die Feldlinien verlaufen somit parallel zur Oberfläche.

Ist die Feldverteilung in der Umgebung des Supraleiters bekannt, so kann man daraus die Kraft berechnen. Der Druck senkrecht zu einem Flächenelement der Oberfläche des Supraleiters p_n ist über $p_n = 1/2 H_{\parallel}^2 \mu_0$ mit der tangentialen Komponente H_{\parallel} der magnetischen Feldstärke verbunden. Die Ermittlung der Feldverteilung in der Umgebung des Supraleiters ist jedoch in den meisten Fällen nur mit aufwendigen numerischen Verfahren möglich.

In den folgenden Abschnitten soll daher ein anderer Weg zur Berechnung der Kraft bzw. der Feldstärke verwendet werden, nämlich die Methode der Spiegelströme. Dabei wird der Oberflächenstrom durch einen virtuellen Strom im Innern des Supraleiters ersetzt, der außerhalb des Supraleiters das gleiche Feld erzeugt wie der Strom auf der Oberfläche. Dies gelingt jedoch nur für relativ einfache Kombinationen aus Leiter und Supraleiter.

In der Praxis läßt sich die Kraft, die eine Spule auf einen supraleitenden Körper ausübt, auch aus dem Induktivitätsverlauf bei Annäherung dieses Körpers berechnen. Dazu betrachte man eine kurzgeschlossene supraleitende Spule, deren Induktivität $L(x)$ vom Abstand x eines supraleitenden Körpers abhängt. In diesen Kreis sei ein Fluß Φ eingefroren. Für die magnetische Energie E des Kreises gilt:

$$E = \frac{\Phi^2}{2L} . \quad (4.1)$$

Die Kraft ergibt sich aus der Ableitung der Energie:

$$F(x) = -\frac{dE}{dx} = \frac{\Phi^2}{2L^2(x)} \frac{dL}{dx} = \frac{I^2(x)}{2} \cdot \frac{dL}{dx} , \quad (4.2)$$

wobei $I(x)$ der Strom im supraleitenden Kreis ist. Diese Beziehung für die Kraft gilt auch dann, wenn die Spule durch eine externe Stromquelle gespeist wird oder normalleitend ist.

4.2 Gerader Leiter vor einer supraleitenden Ebene

Das Feld einer Stromverteilung $\mathbf{j}_1(\mathbf{r})$ vor einer unendlich ausgedehnten supraleitenden Ebenen läßt sich berechnen, indem man den Oberflächenstrom durch einen Spiegelstrom $\mathbf{j}_s(\mathbf{r})$ im Supraleiter ersetzt, der spiegelsymmetrisch zur Oberfläche des Supraleiters liegt und den gleichen Betrag aber das entgegengesetzte Vorzeichen von \mathbf{j}_1 besitzt.

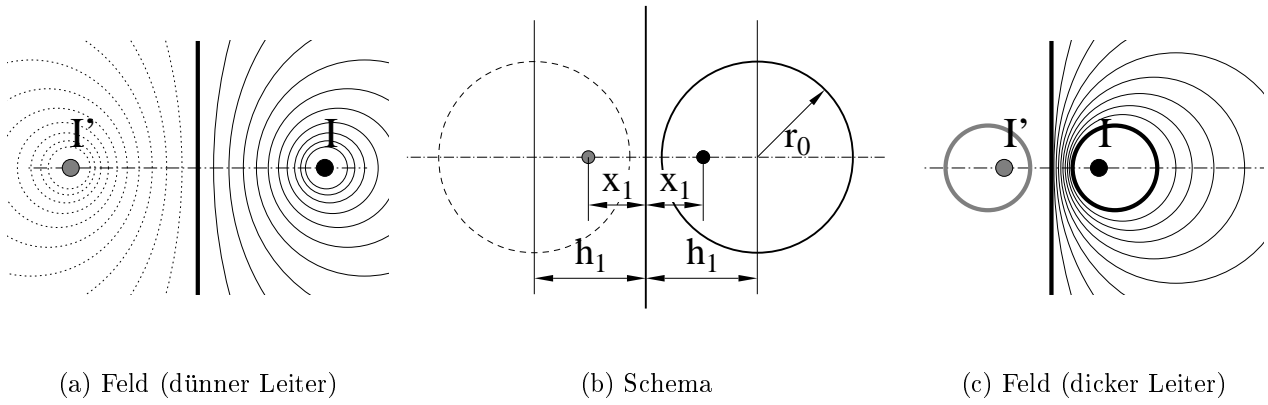


Abbildung 4.1: Gerader Leiter vor supraleitender Ebene

Für einen dünnen geraden Leiter, der im Abstand h parallel zu einer supraleitenden Ebene verläuft und durch den ein Strom I fließt, erhält man einen spiegelsymmetrischen Strom $-I$. Die Feldlinien zweier paralleler Ströme mit gleichem Betrag aber entgegengesetzter Richtung sind, wie beim einzelnen Leiter, Kreise. Allerdings liegt der Mittelpunkt der Kreise nicht im Zentrum der Leiter, sondern im Abstand x_m von der supraleitenden Ebene. Für die Feldlinie mit dem Radius r ist:

$$x_m = \sqrt{h^2 + r^2} . \quad (4.3)$$

Für jede der Feldlinien liegen der Strom und der Spiegelstrom spiegelsymmetrisch (Spiegelung am Kreis).

Die abstoßende Kraft, die der stromdurchflossene Leiter auf die supraleitende Ebene ausübt, entspricht der Kraft zweier stromdurchflossener Drähte im Abstand $2h$:

$$\tilde{f} = \frac{F}{l_L} = \mu_0 \frac{I^2}{4\pi h} , \quad (4.4)$$

wobei \tilde{f} die spezifische Kraft pro Länge l_L des Leiters ist.

Die supraleitende Ebene bewirkt, daß die Feldstärke zwischen Draht und supraleitender Ebene verstärkt wird, während sie auf der anderen Seite des Drahtes abnimmt. Damit ändert sich auch Stromverteilung auf der Oberfläche des Leiters. Diese asymmetrische Stromdichteverteilung auf der Oberfläche des Drahtes läßt sich durch einen Ersatzstrom im Innern des Drahtes ersetzen, der das gleiche Außenfeld liefert. Der Ersatzstrom (Abstand x_1 von der Ebene) und dessen Spiegelstrom hinter der supraleitenden Ebene müssen so liegen, daß sowohl Feldlinien entlang Oberfläche des Drahtes als auch entlang der supraleitenden Ebene verlaufen. Da eine der Feldlinien auf der Oberfläche des Drahtes verläuft, dessen Mittelpunkt einen Abstand h_1 von der Ebene hat und der einen Radius r_0 besitzt, ergibt sich entsprechend von Gl. (4.3):

$$h_1 = \sqrt{x_1^2 + r_0^2} \quad \rightarrow \quad x_1 = \sqrt{h_1^2 - r_0^2} . \quad (4.5)$$

Die spezifische Kraft auf die supraleitende Ebene ergibt sich entsprechend Gl. (4.4):

$$\tilde{f} = \mu_0 \frac{I^2}{4\pi \sqrt{h_1^2 - r_0^2}} . \quad (4.6)$$

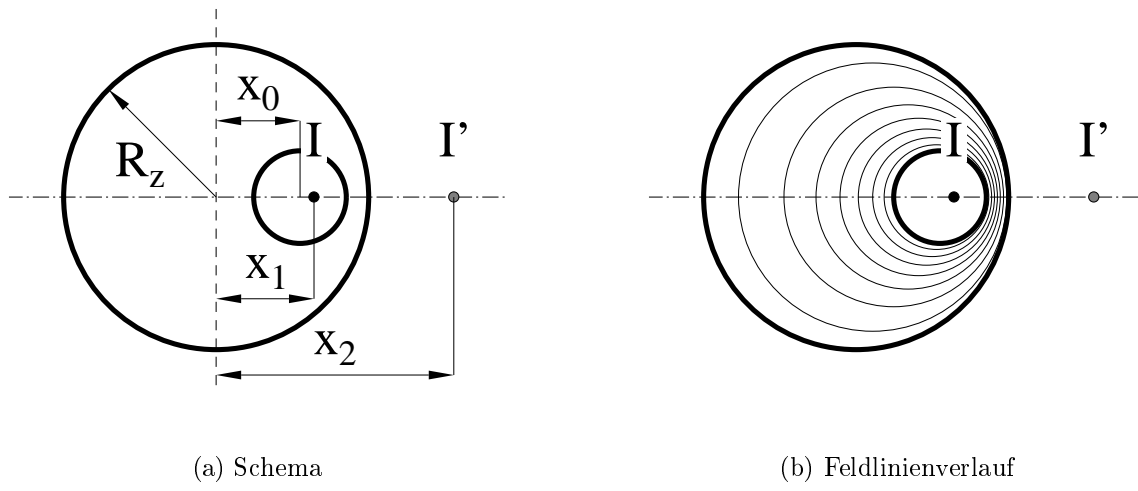


Abbildung 4.2: Gerader Leiter in supraleitendem Zylinder

Nimmt man an, daß die Stromschleife in großer Entfernung geschlossen wird, so kann man die spezifische Induktivität pro Längeneinheit des Drahtes $\tilde{l} = L/l_L$ berechnen. Die Induktivität ergibt sich dabei aus dem Fluß, der den Bereich zwischen Oberfläche des Leiters und der supraleitenden Ebene durchdringt. Entsprechend der bekannten Beziehung für die Feldstärke H eines geraden Leiters gilt:

$$\begin{aligned}\tilde{l} &= \frac{\Phi}{Il_L} = \frac{l_L}{l_L I} \int_0^{h_1-r_0} \mu_0 H dx = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_0^{h_1-r_0} \left[\frac{1}{x_1-x} + \frac{1}{x_1+x} \right] dx \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{h^2 - r_0^2} + (h_1 - r_0)}{\sqrt{h_1^2 - r_0^2} - (h_1 - r_0)} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{h_1 + \sqrt{h_1^2 - r_0^2}}{r_0} .\end{aligned}\quad (4.7)$$

Die Induktivität verschwindet wie erwartet, wenn die supraleitende Ebene den Draht berührt ($h_1 = r_0$). Für dünne Drähte $r_0 \ll h$ erhält man:

$$\tilde{l} \approx \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2h}{r_0} . \quad (4.8)$$

Für die Ableitung der Induktivität nach h_1 gilt:

$$\frac{d\tilde{l}}{dh_1} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{1 + h_1/\sqrt{h_1^2 - r_0^2}}{h_1 + \sqrt{h_1^2 - r_0^2}} = \frac{\mu_0}{2\pi \sqrt{h_1^2 - r_0^2}} . \quad (4.9)$$

4.3 Gerader Leiter in einem supraleitenden Zylinder

Auch für einen unendlich langen geraden Draht, der innerhalb eines supraleitenden Zylinders verläuft, läßt sich ein Ersatzstrom und ein Spiegelstrom finden, so daß sowohl die Oberfläche des Zylinders als auch die Oberfläche des Drahtes mit einer der kreisförmigen Feldlinien zusammenfällt. Damit dies zutrifft, müssen die Koordinaten des Ersatzstromes und des Spiegelstromes die jeweiligen Bedingungen für die Spiegelung am Kreis erfüllen:

$$x_1 x_2 = R_z^2 , \quad (x_1 - x_0)(x_2 - x_0) = r_0^2 , \quad (4.10)$$

wobei $(x_0, 0)$ die Koordinaten des Mittelpunktes des Drahtes, $(x_1, 0)$ die Koordinaten des Ersatzstromes, $(x_2, 0)$ die Koordinaten des Spiegelstromes, R_z der Radius des Zylinders und r_0

der Radius des Drahtquerschnitts sind. Die z -Achse des verwendeten kartesischen Koordinatensystems stimmt mit der Achse des Zylinders überein. Bei den Koordinatenangaben wird jeweils auf die z -Koordinate verzichtet. Als Lösung des Gleichungssystem erhält man:

$$x_{1/2} = \frac{R^2 - r_0^2 + x_0^2}{2x_0} \pm \sqrt{\left(\frac{R_z^2 - r_0^2 + x_0^2}{2x_0}\right)^2 - R_z^2}, \quad (4.11)$$

Für die Kraft auf den Zylinder folgt damit:

$$|\tilde{f}| = \frac{I^2 \mu_0}{2\pi(x_2 - x_1)} = \frac{I^2 \mu_0}{2\pi} \cdot \frac{x_0}{\sqrt{(R_z^2 - r^2 + x_0^2)^2 - 4R_z^2 x_0}}. \quad (4.12)$$

Die Kraft auf den Zylinder ist kleiner als bei einer supraleitenden Platte und verschwindet für einen zentrierten Draht.

Für die Induktivität gilt:

$$\tilde{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{x_0+r_0}^{R_z} \left[\frac{1}{x - x_1} - \frac{1}{x - x_2} \right] dx. \quad (4.13)$$

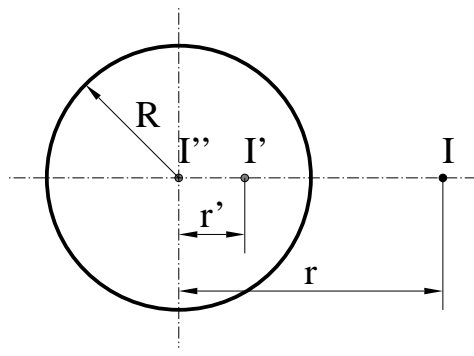
Nach mehreren aufwendigen Umformungen erhält man:

$$\tilde{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{\sqrt{(R_z^2 + x_0^2 - r_0^2)^2 - 4R_z^2 x_0^2} + R_z^2 + r_0^2 - x_0^2}{2R_z r_0}. \quad (4.14)$$

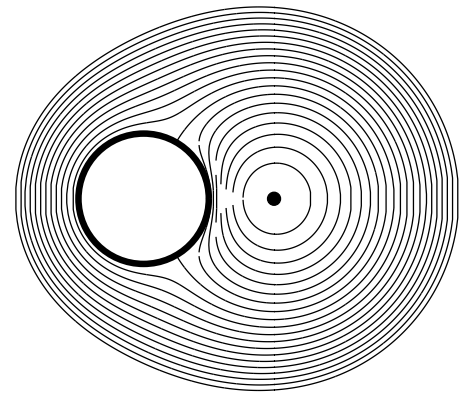
Wie erwartet verschwindet die Induktivität, wenn der Draht den Zylinder berührt ($x_0 = R_z - r_0$). Hält man den Abstand des Drahtes von der Oberfläche des Zylinders $\Delta x = R_z - x_0$ konstant, so steigt die Induktivität mit zunehmenden Radius des Zylinders ebenfalls an. Ist $r_0 < \Delta x \ll R_z$, so erhält man nahezu die gleiche Beziehung wie für den Draht vor der supraleitenden Ebene, wobei der Wert für den Zylinder immer geringfügig kleiner als bei der Ebene ist. Auch die abstoßende Kraft ist kleiner, da sich bei der Spiegelung am Kreis ein größerer Abstand zum Spiegelstrom ergibt.

4.4 Gerader Leiter außerhalb des Zylinders

Auch die Feldverteilung eines dünnen Drahtes außerhalb eines supraleitenden Zylinders läßt sich mit Hilfe von Spiegelströmen berechnen. Die Lage des Spiegelstroms ergibt sich ebenfalls durch Spiegelung am Kreis. Verwendet man nur einen einzelnen Spiegelstrom im Innern des Drahtes, so entspricht die erhaltene Feldverteilung dem Fall, daß der supraleitende Zylinder als Rückleiter für den Strom im Draht verwendet wird. Will man den Fall untersuchen, daß der Gesamtstrom auf der Oberfläche des Zylinders verschwindet, so benötigt man noch einen zweiten virtuellen Strom im Zentrum des Zylinders, der die gleiche Richtung wie der Strom im Draht hat. Auf die durchgeführten analytischen Rechnungen soll an dieser Stelle verzichtet werden. Es zeigte sich dabei jedoch, daß die erhaltenen Feldlinien (siehe Abb. 4.3(b)) im Gegensatz zu den vorangehenden Beispielen keine Kreise sind. Bei der Betrachtung der Feldlinien sollte man beachten, daß an der Stelle, an der eine der Feldlinien senkrecht auf die supraleitende Ebene trifft, ist die Feldstärke 0. Dies ist also kein Widerspruch zur Aussage, daß die Feldstärke an



(a) Schema



(b) Feldlinienverlauf

Abbildung 4.3: Dünner Leiter vor einem supraleitenden Zylinder

der Oberfläche keine senkrechte Komponente besitzt. Die Kraft auf den Zylinder ist kleiner und die Induktivität größer als bei einem Draht vor einer supraleitenden Platte im gleichen Abstand.

Die Beziehungen für die Lage der Spiegelströme wurde genutzt, um mit Hilfe eines Computerprogramms die Kraft der Mänderspulen (siehe Kap. 2.5) auf die Testkörper abzuschätzen.

Das Problem eines dicken Leiters vor einer supraleitenden Platte ließ sich nicht mehr durch wenige Spiegelströme beschreiben.

4.5 Ringspule vor einer supraleitenden Ebene

In diesem Kapitel soll eine supraleitende dünne Ringspule mit dem Radius R betrachtet werden, die sich im Abstand h über einer unendlich ausgedehnten supraleitenden Ebene befindet. Der Einfluß der supraleitenden Ebene kann durch einen symmetrisch zur Ebene gelegenen kreisförmigen Spiegelstrom mit entgegengesetzter Orientierung berücksichtigt werden.

Ausgangspunkt für die Berechnung des Feldes und der Induktivität ist das Feld eines Ringstromes. Da es sich um eine rotationssymmetrische Anordnung handelt, wird ein Zylinderkoordinatensystem verwendet. Der Ursprung des Koordinatensystem liegt im Mittelpunkt des Drahttringes, wobei die z -Achse senkrecht auf der Ebene des Drahtes steht. Das magnetische Vektorpotential besitzt dann nur eine φ -Komponente. Sie beträgt [66]:

$$A_\varphi(r, z) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \sqrt{(R+r)^2 + z^2} \left(\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K_e(k) - E_e(k) \right) \quad \text{mit} \quad k^2 = \frac{4Rr}{(R+r)^2 + z^2} . \quad (4.15)$$

Dabei ist I der Strom durch den Draht und $K_e(k)$ bzw. $E_e(k)$ sind die elliptischen Integrale 1. bzw. 2. Art. :

$$K_e(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Psi}} \quad , \quad E_e(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Psi} d\Psi . \quad (4.16)$$

Für das Feld ergibt sich damit:

$$\begin{aligned} B_r &= -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{z}{r \sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \left(-K_e(k) + \frac{R^2 + r^2 + z^2}{(R-r)^2 + z^2} E_e(k) \right) , \\ B_z &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(R+r)^2 + z^2}} \left(K_e(k) + \frac{R^2 - r^2 - z^2}{(R-r)^2 + z^2} E_e(k) \right) . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Die Feldlinien verlaufen in der Umgebung des Drahtes nahezu kreisförmig. Für einen supraleitenden Draht, dessen Querschnittsradius r_0 klein ist ($R \gg r_0$), kann man also den Oberflächenstrom durch einen linienförmigen Strom im Zentrum des Drahtquerschnitts ersetzen. Die Induktivität eines solchen Drahttringes (ohne supraleitende Ebene) ergibt sich aus dem umschlossenen Fluß und dem fließenden Strom. Der Fluß ergibt sich dabei aus der φ -Komponente des Vektorpotentials an der Oberfläche des Drahtes [67]:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{2\pi R}{I} A_\varphi(R, r_0) . \quad (4.18)$$

Ist $1 - k^2 \ll 1$, so gilt für die elliptischen Integrale:

$$E_e(k) \approx E_e(1) = 1 , \quad K_e(k) \approx -\frac{1}{2} \ln(1 - k^2) . \quad (4.19)$$

Damit gilt für Spulen, deren Querschnittsradius r_0 deutlich kleiner als der Ringdurchmesser ist ($r_0 \ll R$):

$$L \approx \frac{\mu_0 2\pi R}{2\pi R} \sqrt{4R^2} \left[-\left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{2} \ln \frac{r_0^2}{4R^2} - 1 \right] = \mu_0 R \left[\ln \frac{2R}{r_0} - 2 \right] . \quad (4.20)$$

Die Kraft auf den Ringleiter vor der supraleitenden Ebene kann man mit Hilfe des Feldes des Spiegelstromes berechnen. Da der Strom in φ -Richtung fließt, ergibt sich die z -Komponente der Kraft, die der Spiegelstrom auf den Leiter ausübt, aus der r -Komponente des Feldes des Ringstromes:

$$F_z = 2\pi I R B_r^{ring}(R, 2h) = \frac{\mu_0 I^2 h}{\sqrt{R^2 + h^2}} \left(-K_e(k) + \frac{R^2 + 2h^2}{2h^2} E_e(k) \right) . \quad (4.21)$$

Damit folgt für $r_0 \ll h \ll R$:

$$F_z(h) \approx \frac{\mu_0 I^2 h}{R} \left(\ln \frac{h}{R} + \frac{R^2}{2h^2} \right) \approx \frac{\mu_0 I^2 R}{2h} . \quad (4.22)$$

Man erhält also für Abstände, die kleiner als der Krümmungsradius sind, das gleiche Ergebnis wie für einen geraden Leiter, dessen Länge dem Umfang des Kreises $2\pi R$ entspricht. Die Induktivität ergibt sich wie in Gl. (4.18) aus dem Vektorpotential an der Oberfläche des Drahtes. Dabei wird angenommen, daß $r_0 \ll R$ und $r_0 \ll h$ ist:

$$L = \frac{2\pi}{I} \left(A_\varphi(R, r_0) - A_\varphi(R, 2h + r_0) \right) . \quad (4.23)$$

Für einen dünnen Ringleiter ($R \gg h \gg r_0$) gilt:

$$L \approx \frac{\mu_0 2\pi R}{2\pi R} \sqrt{4R^2} \left[-\frac{1}{4} \ln \frac{r_0^2}{4R^2} - 1 + \frac{1}{4} \ln \frac{2h + r_0^2}{4R^2} + 1 \right] \approx \mu_0 R \ln \frac{2h}{r_0} . \quad (4.24)$$

Man erhält also die gleiche Induktivität wie für einen Draht der Länge $2\pi R$ nach Gl. (4.8).

4.6 Verallgemeinerung

Die Erkenntnisse aus den vorangehenden Kapiteln lassen sich für beliebige flache Leiterschleifen aus dünnen Drähten vor einer supraleitenden Ebene verallgemeinern. Sind die Biegeradien und der Abstand der einzelnen Leiterabschnitte groß gegen den Abstand von der supraleitenden Ebene h , so gilt für die Induktivität:

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \cdot \ln \frac{2h}{r_0} , \quad (4.25)$$

wobei l die Länge und r_0 der Querschnittsradius des Drahtes ist. Liegen n Windungen dicht beieinander, so erhält man für die Induktivität etwas weniger als das n^2 -fache der Induktivität einer einzelnen Windung. Die Anordnung verhält sich nahezu wie eine einzelne Windung mit dem n -fachen Strom, aber einem größeren Querschnitt. Dagegen erhält man für dL/dx und die Kraft auf die Ebene jeweils den n^2 fachen Wert der einzelnen Windung.

Ein großer Teil der Induktivität wird durch das Feld in unmittelbarer Umgebung des Leiters bestimmt. Dieses hängt jedoch entscheidend vom Querschnitt des Leiters ab. Daher gelten die Beziehungen in den vorangehenden Kapiteln nur für kreisförmige Querschnitte.

Für beliebige Querschnitte läßt sich das Problem in der Regel nur numerisch lösen. Für einen dünnen breiten Leiter (Breite b) in der Nähe einer supraleitenden Platte ($h \ll b$) kann man jedoch näherungsweise die spezifische Induktivität bestimmen. Das Feld konzentriert sich in diesem Fall vorwiegend zwischen supraleitender Ebene und Leiter, während es auf der gegenüberliegenden Seite des Leiters verschwindet¹. Die Feldstärke ist im Zwischenraum zwischen Leiter und supraleitender Platte nahezu konstant. Damit gilt entsprechend der Maxwell-Gleichungen:

$$I = \oint \mathbf{H} d\mathbf{r} = b \cdot H . \quad (4.26)$$

Für die spezifische Induktivität pro Leiterlänge gilt damit

$$\tilde{l} = \frac{\Phi}{Il} = \frac{\mu_0 H \cdot hl}{Il} = \mu_0 \frac{h}{b} , \quad (4.27)$$

wobei Φ der Fluß ist, der die Fläche (Länge l , Höhe h , Strom im Leiter I) zwischen einem Leiterabschnitt und dem Supraleiter durchdringt. Die Induktivität nimmt also linear mit dem Abstand h zu, solange $h \ll b$ ist. Allerdings haben breite Leiter nur eine sehr geringe Induktivität, was sich ungünstig auf den Einsatz als Detektorspulen auswirkt.

Eine weitere Möglichkeit, einen linearen Verlauf der Induktivität zu erreichen, bietet eine Anordnung aus dünnen geraden Leitern und einer supraleitenden Platte, die sich parallel zu den Leitern bewegt.

Als Beispiel soll ein einzelner gerader Draht betrachtet werden, dessen Länge deutlich größer als der Abstand der supraleitenden Platte ist. Betrachtet man die spezifische Induktivität, so kann man drei Bereiche unterscheiden.

- einen Bereich der nicht von der supraleitenden Platte abgedeckt und hinreichend weit von der Kante der Platte entfernt ist und eine konstante spezifische Induktivität von \tilde{l}_1 besitzt,

¹Auf der einen Seite addieren sich die Felder von Strom und Spiegelstrom, während sie sich auf der gegenüberliegenden Seite kompensieren.

- einen Bereich der vollständig abgedeckt ist und eine konstante spezifische Induktivität \tilde{l}_2 besitzt und
- einen Übergangsbereich, in dem sich die spezifische Induktivität ändert.

Verschiebt man die supraleitende Platte um x , so vergrößert sich der erste Bereich, während sich der zweite Bereich verkleinert. Die Breite des Übergangsbereiches ändert sich dagegen nicht. Damit ändert sich die Induktivität um $x \cdot (\tilde{l}_1 - \tilde{l}_2)$. Man erhält also eine lineare Abhängigkeit.

Der Nachteil der Anordnung ist, daß die Induktivität stark vom Abstand der Platte vom Draht abhängt.

4.7 Flache Mäanderspule und supraleitende Ebene

Im folgenden soll eine periodische Anordnung von Drähten mit gleichen Beträgen der Ströme I , aber alternierenden Stromrichtungen (Mäander) vor einer supraleitenden Ebene betrachtet werden. Diese Form der Spulen kann für die Stabilisierung der Körper in horizontaler Richtung eingesetzt werden. Es soll daher nur die Kraft auf die supraleitende Ebene berechnet werden. Untersucht man ein System von mehreren Drähten, so muß man beachten, daß der Draht i dem Spiegelstrom des Drahtes j nicht mehr senkrecht gegenüberliegt. Im folgenden wird angenommen, daß die Drähte in z -Richtung verlaufen und die supraleitende Ebene mit der y - z Ebene zusammenfällt. Die Drähte verlaufen parallel zueinander und zur Ebene und haben die Koordinaten (x_i, h) . Zur Berechnung der abstoßenden Kraft benötigt man nur die x Komponente des Feldes (Komponente parallel zur supraleitenden Ebene) von Draht i am Ort des Spiegelstromes j (vertikaler Abstand $2h$):

$$H_{ij}^{(x)}(2h) = \frac{I_i 2h}{2\pi((2h)^2 + (x_i - x_j)^2)} . \quad (4.28)$$

Der Abstand der Drähte sei d . Die x -Koordinaten der Drähte sind damit $x = 0, \pm d, \pm 2d, \dots$. Für die x -Komponente der Feldstärke an einem Punkt auf der y -Achse im Abstand y zum nächsten Draht gilt damit:

$$H(y) = \frac{I}{2\pi y} - \frac{2Iy}{2\pi(y^2 + d^2)} + \frac{2Iy}{2\pi(y^2 + 4d^2)} - \dots = \frac{Iy}{\pi d^2} \left(\frac{1}{2y/d} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(y/d)^2 + k^2} \right) . \quad (4.29)$$

Entsprechend [68] gilt:

$$\frac{1}{2a^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{a^2 + k^2} = \frac{\pi}{2a \sinh a\pi} . \quad (4.30)$$

Damit folgt:

$$H(y) = \frac{I}{2d \sinh(\pi \frac{y}{d})} . \quad (4.31)$$

Für große Abstände der Drähte $d \gg h$ erhält man wieder die Beziehung für einen einzelnen Draht. Für die spezifische Kraft \tilde{f} , die pro Draht und Drahtlänge ausgeübt wird, gilt damit:

$$\tilde{f} = \mu_0 H(2h) I . \quad (4.32)$$

Betrachtet man eine Fläche der Breite b und der Länge l , so befinden sich dort im Mittel b/d Drähte. Als mittleren Druck p auf die Fläche erhält man:

$$p(h, d) = \frac{\frac{b}{d} \tilde{f} \cdot l}{b \cdot l} = \frac{I^2 \mu_0}{2d^2 \sinh(\pi \frac{2h}{d})} . \quad (4.33)$$

Bei vorgegebenem h liegt das Maximum dieser Funktion bei $d \approx 3,281h$. Bei kleinerem Abstand heben sich die Felder der alternierenden Ströme im entscheidenden Abstandsbereich zu stark auf und die Kraft läßt nach. Bei größerem Abstand sind nicht genug Drähte pro Fläche vorhanden.

Wird ein Körper von beiden Seiten durch mäanderförmige Spulen stabilisiert, durch die der gleiche Strom fließt, so heben sich die Kräfte bei Mittellage des Körpers auf. Will man die Steifheit der Stabilisierung bestimmen, so benötigt man die Ableitung der Kraft nach dem Abstand h :

$$\frac{dp}{dh} = -\frac{I^2 \mu_0}{2d^2 \sinh^2(2\pi h/d)} \frac{2\pi}{d} \cosh(2\pi h/d) . \quad (4.34)$$

Bei vorgegebenem h hat diese Funktion ihr Minimum bei $d \approx 2,1287h$.

Man sieht damit, daß es nicht sinnvoll ist, den Abstand der Drähte der Mäanderspule zu klein zu wählen. Wenn der Abstand der Drähte in den Bereich von h kommt, läßt die Kraft deutlich nach. Man kann die Kraft dann nur erhöhen, wenn man den Strom erhöht, oder mehrere Drähte mit der gleichen Stromrichtung dicht zusammenlegt.

4.8 Drahting und supraleitende Kugel

In diesem Kapitel soll eine dünne Ringspule vor einer supraleitenden Kugel betrachtet werden. Dies ist eines der wenigen realen Probleme, die sich exakt analytisch lösen läßt. In der Praxis kommt diese Konfiguration zum Beispiel in supraleitenden Gravimetern zum Einsatz. Dies betrifft sowohl die Levitation der Kugeln als auch die Detektion ihrer Bewegung. Obwohl beim geplanten Fallturmexperiment keine kugelförmigen Testkörper zum Einsatz kommen, trägt das Beispiel der supraleitenden Kugel zum Verständnis der möglichen Induktivitätsverläufe und deren Auswirkungen bei.

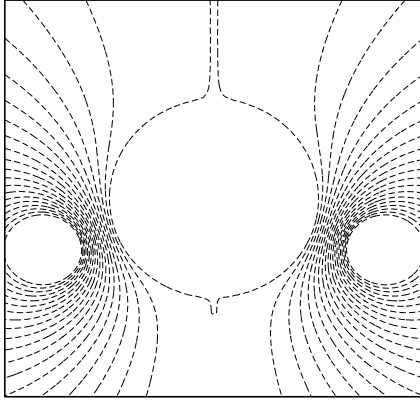
Als Koordinatensystem wird erneut ein Zylinderkoordinatensystem gewählt, dessen Koordinatenursprung mit dem Mittelpunkt der Kugel zusammenfällt. Das Zentrum der Ringspule liege auf der z -Achse. Die Ebene der Spule verläuft parallel zur φ - r -Ebene.

Das Problem läßt sich ebenfalls mit Hilfe eines Spiegelstromes lösen. Die Lage des Spiegelstromes ergibt sich durch Spiegelung des Drahtes an der Kugel. Der Spiegelstrom hat wieder den entgegengesetzten Richtungssinn. Im Gegensatz zu den vorangehenden Kapiteln unterscheiden sich jedoch Spiegelstrom I' und realer Strom I im Betrag.

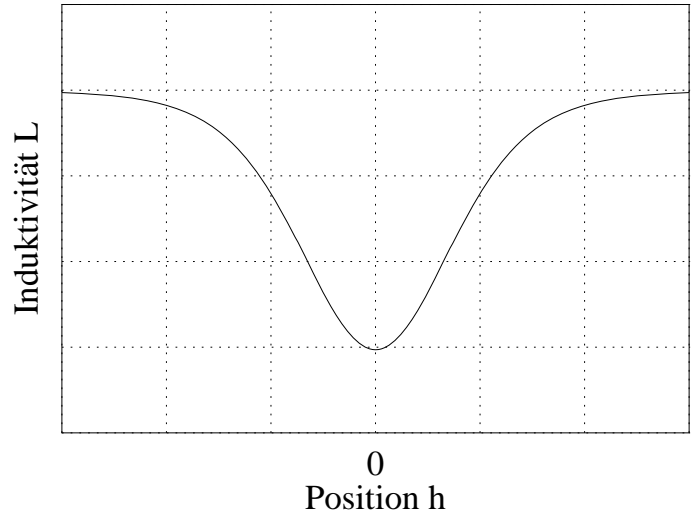
$$r'_0 = r_0 \cdot X \quad , \quad h'_0 = h_0 \cdot X \quad , \quad I' = \frac{I}{\sqrt{X}} \quad \text{mit} \quad X = \frac{R_0^2}{r_0^2 + h_0^2} . \quad (4.35)$$

Dabei sind (r_0, h_0) die Koordinaten des Drahtes, (r'_0, h'_0) die Koordinaten des Spiegelstromes und R_0 der Radius der Kugel. Damit gilt für das Vektorpotential:

$$A_\varphi(r, z) = IF(r, z - h_0, r_0) - I'F(r, z - h'_0, r'_0) \quad (4.36)$$



(a) Feldverlauf



(b) Abhängigkeit der Induktivität vom Abstand der Mittelpunkte

Abbildung 4.4: Ringspule und supraleitende Kugel

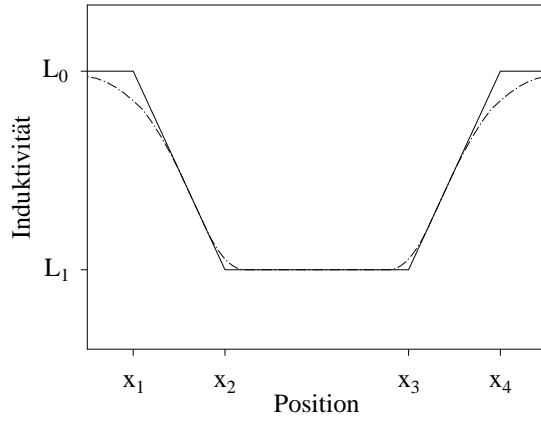
$$\begin{aligned} \text{mit} \quad F(r, z, R) &= \frac{\mu_0}{2\pi r} \sqrt{(R+r)^2 + z^2} \left(\left(1 - \frac{k^2}{2}\right) K_e(k) - E_e(k) \right) \\ \text{und} \quad k^2 &= \frac{4Rr}{(R+r)^2 + z^2} . \end{aligned} \quad (4.37)$$

Die Induktivität wird erneut aus dem Vektorpotential auf der Oberfläche des Drahtes berechnet:

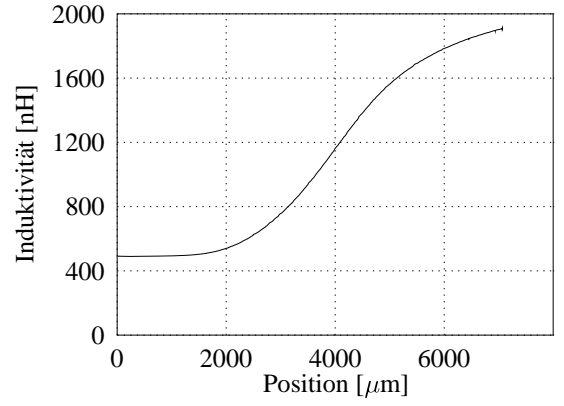
$$\begin{aligned} L(h) &= \frac{2\pi A_\phi(r_0, h_0 + r_d)}{I} = L_\infty - \Delta L(h_0) \quad \text{mit} \\ L_\infty &= 2\pi r_0 F(r_0, r_d, r_0) , \quad \Delta L(h_0) = \frac{2\pi r_0}{\sqrt{X}} F(r_0, h_0 - h'_0 - r_d, r'_0) \approx \frac{2\pi r_0}{\sqrt{X}} F(r_0, h_0 - h'_0, r'_0) \end{aligned} \quad (4.38)$$

wobei r_d der Radius des Drahtes ist. Während L_∞ die Induktivität des Ringes ohne supraleitende Kugel beschreibt, bestimmt ΔL die Änderung der Induktivität durch die Annäherung der Kugel. Falls $r_0 < R_0$ ist, so divergiert ΔL bei $X = 1$. In diesem Fall bleibt nämlich die Kugel im Ring hängen. Für kleine Abstände zwischen Kugeloberfläche und stromführendem Leiter gelten dann ähnliche Beziehungen wie für einen geraden Leiter vor einer supraleitenden Ebene, allerdings nähert sich der Draht bei einer senkrechten Verschiebung der Kugel um dh_0 der nur um $dh_0 \cdot \sqrt{1 - r_0^2/R_0^2}$ an, daß heißt, die Induktivitätsänderung ist kleiner als bei der supraleitenden Ebene.

Ist dagegen die Kugel kleiner als der Ring, so hat die Induktivität für $h_0 = 0$ ein Minimum und strebt nach beiden Seiten gegen die Induktivität eines einfachen Ringes. Der Induktivitätsverlauf ist dabei symmetrisch (siehe Abb. 4.4(b)). Interessant ist der daraus resultierende Kraftverlauf. Für große Beträge von h_0 ist der Induktivitätsverlauf konkav gekrümmt ($dL/dh_0 < 0$, $d^2L/dh_0^2 < 0$), d.h. die abstoßende Kraft nimmt bei Annäherung zu. In der Nähe der zentrierten Lage ist die Kurve dagegen konvex gekrümmt. Die Kraft ist zwar weiterhin abstoßend, nimmt



(a) Modell (ideal und mit Einfluß der Streufelder - gestrichelt)



(b) Meßkurve einer kurzen Tauchspule („siehe Text“)

Abbildung 4.5: Induktivitätsverlauf einer Zylinderspule

jedoch bei weiterer Annäherung wieder ab und verschwindet für $h_0 = 0$.

4.9 Tauchspulen

Der Induktivitätsverlauf für einen beliebig geformten Körper, der in eine Spule eintauchen kann, ähnelt demjenigen bei der Kugel. Allerdings ist die Breite der einzelnen Abschnitte und die Größe der Induktivitätsänderungen unterschiedlich.

Ein Idealfall ist ein langer zylinderförmiger Körper, der von oben in eine lange Zylinderspule eintaucht. Befindet sich der Körper außerhalb der Spule, so führt eine Verschiebung des Körpers im Streufeld der Spule zwar bereits zu einer Induktivitätsänderung, diese ist jedoch relativ gering. Je mehr sich die Unterkante des Körpers der Oberkante der Spule annähert, desto größer wird das verdrängte Streufeld und um so größer wird die Induktivitätsänderung. Die Zunahme von dL/dx setzt sich auch noch fort, nachdem der Körper in die Spule eingetaucht ist, da an den Rändern der Zylinderspule die Feldstärke etwas geringer ist. Es schließt sich ein relativ langer linearer Bereich des Induktivitätsverlaufs an, bis entweder die Unterkante des Körpers in die Nähe der Unterkante der Spule kommt oder die Oberkante des Körpers in die Nähe der Oberkante der Spule, je nachdem ob der Körper länger als die Spule ist, oder nicht. Abhängig von der Differenz der Längen von Körper und Spule gibt es einen relativ großen Bereich in dem sich die Induktivität der Spule nicht ändert. Es schließt sich ein symmetrischer Bereich an, in dem die Induktivität wieder linear zunimmt.

Vernachlässigt man die Streufelder der Spule, kann man den Induktivitätsverlauf durch den in Abb. 4.5(a) dargestellten Verlauf annähern. Für den Anstieg im linearen Abschnitt gilt $dL/dx \approx (L_0 - L_1)/h$, wobei L_0 bzw. L_1 die Induktivitäten ohne bzw. mit vollständig eingetauchten Zylinder und h die Höhe der Spule sind. Für lange Zylinderspulen gilt dabei:

$$L_0 \approx \mu_0 n^2 \pi r_s^2 / h, \quad L_1 \approx \mu_0 n^2 \pi (r_s^2 - r_z^2) / h, \quad (4.39)$$

wobei r_s der Radius der Spule und r_z der Radius des Zylinders ist. Man erhält also um so größere Anstiege, je kürzer die Spulen sind. Andererseits wird für kurze Spulen die Abhängigkeit zwischen Position des Körpers und Induktivität nichtlinear, so daß die obige Näherung nicht mehr gilt. In Abb. 4.5(b) ist der gemessene Verlauf einer kurzen Zylinderspule dargestellt [9], der in Vorbereitung auf die Fallturmexperimente von S. Nietzsche untersucht wurde. Er entspricht der rechten Seite der Modellkurve Abb. 4.5(a).

Ein weiterer Nachteil kurzer Zylinderspulen besteht darin, daß die Induktivität stark von der radialen Lage des Zylinders abhängt, da die Feldstärke bei diesen Spulen in radialer Richtung stark zunimmt.

4.10 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Es wurde gezeigt, daß sich der Induktivitätsverlauf von planaren Drahtspulen in der Nähe einer supraleitenden Fläche durch einen Ausdruck der Form $L(x) = L_1 + L_2 \ln(x/r_0)$ (L_1 und L_2 konstant) beschreiben läßt. Detektoren, deren Spulen einen solchen Induktivitätsverlauf besitzen, weisen eine stark nichtlineare Kennlinie auf. Außerdem führt ein solcher Induktivitätsverlauf zu einem negativen Wert für d^2L/dx^2 .

Der Induktivitätsverlauf für die Kugel und den Ring zeigt, daß es möglich, ist auch Induktivitätsverläufe zu erzeugen, bei denen $d^2L/dx^2 > 0$ ist. In diesem Bereich nimmt die abstoßende Kraft bei Annäherung ab. Befestigt man ober- und unterhalb der Kugel eine Ringspule, deren Radius größer als der der Kugel ist, so kann man je nach Abstand der Ringspulen entweder eine positive oder negative Federkonstante erzielen. Eine geschickt eingesetzte „negative Feder“ kann z.B. dazu genutzt werden, um eine durch einen anderen Prozeß (z.B. den Detektor) hervorgerufene Federkonstante zu kompensieren. Das Modell der Kugel dient bezogen auf unser Experiment nur als Beispiel für einen möglichen Induktivitätsverlauf. Aber auch Testkörper mit einer anderen Form verursachen einen ähnlichen Verlauf, wenn sie vollständig oder teilweise in eine Ringspule eintauchen können.

Bei einer lange Tauchspule mit einem zylinderförmigen Tauchkörper ist der Induktivitätsverlauf über einen großen Bereich nahezu linear. Entsprechend Kap. 3 eignen sich diese Spulen also deutlich besser für den Einsatz in Positionsdetektoren als Flachspulen, wenn es auf möglichst hohe Linearität und geringe Rückwirkung ankommt.

Die theoretisch ermittelten Induktivitätsverläufe für Flachspulen und Tauchspulen stimmen mit den Ergebnissen der experimentellen Untersuchungen im Labor überein [9]. Aufgrund dieser Untersuchungen wurden für das Experiment Tauchspulen als Detektorspulen ausgewählt. Betrachtet man nämlich den gesamten Bewegungsbereich der Testkörper von 0,5 mm, so lieferten die untersuchten Tauchspulen im Mittel eine deutlich höhere Empfindlichkeit als die Flachspulen. Dies gilt besonders für die zentrierte Lage der Testkörper.

Der einzige Nachteil, der bei Tauchspulen auftritt, ist die Abhängigkeit der Induktivität von der radialen Position des Körpers. Dies betrifft insbesondere kurze Tauchspulen, bei denen sich die Feldstärke in radialer Richtung stark ändert (siehe auch Kap. 3.3.5).

Betrachtet man dagegen das Modell einer Flachspule vor einer unendlich ausgedehnten supraleitenden Ebene, so ändert sich die Induktivität nicht, wenn man die Spule parallel zur Ebene verschiebt. Flachspulen scheinen daher hinsichtlich der gewünschten Unempfindlichkeit gegenüber seitlicher Bewegungen Vorteile gegenüber Tauchspulen zu bieten. Reale Körper haben jedoch eine endliche Ausdehnung. So sind bei realen Meßsystemen mit konzentrischen Testkörpern die Flächen, die die erforderlichen Orientierung besitzen (Flächennormale in Richtung der Achse), meist sehr schmal. Daher würden die Drähte der Flachspulen bereits nah an der Kanten des Körpers liegen. Je weiter sich die Drähte der Flachspule dem Rand der supraleitenden Fläche nähern, desto mehr nimmt die Induktivität der Spule zu. Der Einfluß der seitlichen Bewegung läßt sich zwar bei Flachspulen verringern, wenn man den Abstand zwischen Spule und Körper klein wählt. Allerdings wird der Detektor dann empfindlicher gegen ein Verkippen des Körpers.

Es läßt sich nicht ohne weiteres entscheiden, ob bei unserem Experiment Flachspulen oder Zylinderspulen weniger auf die seitliche Bewegung reagieren, da die Wahl einer anderen Spule auch eine andere Testkörpergeometrie erfordert. Es wurden von uns auch keine Untersuchungen zur Abhängigkeit der Induktivität von der radialen Position durchgeführt, da die Meßapparatur, mit der die anderen Induktivitätsverläufe gemessen wurden, dazu aufwendig umgebaut werden müßte.

Es wurden weiterhin Untersuchungen zur Wechselwirkung gerader Drähte mit zylinderförmigen Testkörpern durchgeführt. Diese bildeten die Grundlage für numerische Untersuchungen der Stabilisierung des Testkörpers durch die Mäanderspule. Insbesondere sollte untersucht werden, wie sich der Abstand der Drähte auf die stabilisierende Kraft auswirkt. Bei den derzeit eingesetzten Mäanderspulen wurden diese Betrachtung jedoch nur teilweise berücksichtigt, da sich die optimalen (engen) Abstände bei der eingesetzten Herstellungstechnologie nur schwer realisieren ließen.

Als Tragespulen im Meßsystem (siehe (f) und (i) in Abb. 2.2) wurden mehrlagige Ringspulen gewählt. Bei diesen Spulen kam es vor allem auf eine möglichst große Kraft (viele Windungen) und ein möglichst geringes Übersprechen auf die Detektorspulen an. Der Induktivitätsverlauf dieser Spulen läßt sich jedoch mit keinem der hier vorgestellten Modelle hinreichend gut beschreiben. Es wäre eventuell auch eine Tauchspulenkonfiguration möglich gewesen. Die gewählte Variante hatte sich jedoch im früheren Meßsystem gut bewährt.

Optimierung der Testkörper

5.1 Vorbetrachtungen

Wie in Kap. 2.2.1 gezeigt wurde, hängt die Fallbeschleunigung eines Körpers in einem Gravitationsfeld mit linear abnehmendem Kraftgradienten nur vom Ort des Schwerpunktes ab. Sobald das Potential jedoch nennenswerte höhere Ableitungen besitzt, bestimmt nicht nur die Lage des Schwerpunktes, sondern auch die Form des Körpers, dessen Fallbeschleunigung.

Als Beispiel sollen hier die Beschleunigungen einer Kugel a_1 (siehe Abb. 5.1(a)), einer aus zwei Punktmassen bestehenden Hantel a_2 (siehe Abb. 5.1(b)) und eines dünnen Ringes a_3 (siehe Abb. 5.1(c)) im Feld einer Punktmasse verglichen werden. Die Beschleunigungen der drei Körper lassen sich direkt aus dem Newtonschen Gravitationsgesetz (2.4) berechnen:

$$a_1(r) = \frac{G_g m}{r^2}, \quad a_2(r) = \frac{G_g m(r^2 + l^2)}{(r^2 - l^2)^2}, \quad a_3(r) = \frac{G_g m r}{\sqrt{r^2 + R^2}^3}, \quad (5.1)$$

wobei r der Abstand zwischen dem Schwerpunkt des jeweiligen Körpers und der anziehenden Punktmasse mit der Masse m ist. R ist dabei der Radius des Rings. Die beiden Punktmassen der Hantel haben den Abstand $2l$. Dabei soll $|l| < |r|$ sein, d.h. die anziehende Masse befindet sich außerhalb der Verbindung zwischen den Teilmassen der Hantel. Da $(r^2 + R^2) > r^2 > (r^2 - l^2)$ und $(r^2 + l^2) > (r^2 - l^2)$ ist, gilt $a_3 < a_1 < a_2$. Verallgemeinert bedeutet dies, langstreckte Körper, deren Achse in Richtung der anziehenden Masse ausgerichtet ist, werden im Feld einer Punktmasse stärker beschleunigt als eine Punktmasse mit dem gleichen Abstand des Schwerpunktes. Flache Körper, deren Normale in Richtung der anziehenden Masse zeigt, erfahren dagegen eine geringere Beschleunigung.

Um die Anziehung einer Masseverteilung auf eine in größerer Entfernung befindliche Punktmasse zu charakterisieren, verwendet man die Zerlegung des Potentials in eine Summe von Momenten. Im folgenden sollen die Momente von symmetrischen Rotationskörpern untersucht werden. Dabei bedeutet symmetrisch, daß die Körper zusätzlich zu ihrer Rotationssymmetrie noch eine Symmetrieebene senkrecht zur Symmetrieachse besitzen. Zur Beschreibung des Feldes wird ein Kugelkoordinatensystem (r, θ, φ) verwendet. Dabei fällt die φ - r -Ebene mit der Symmetrieebene und die Achse $\theta = 0$ mit der Symmetrieachse des Körpers zusammen. Das Potential des Außenfeldes¹ eines solchen Körpers läßt sich mit Hilfe der Reihenentwicklung:

$$U_G(r, \theta) = U_{G0} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{2n}}{r^{2n+1}} P_{2n}(\cos \theta) \quad (5.2)$$

beschreiben. Dabei sind P_{2n} die sogenannten Legendre Polynome². Die Koeffizienten B_n ergeben sich aus der konkreten Masseverteilung. Man kann sie entweder aus der Masseverteilung

¹Mit dem Außenfeld ist das Feld außerhalb einer Kugel mit dem Radius r_{min} gemeint, die sämtliche Massen einschließt. Will man dagegen das Potential innerhalb eines Hohlkörpers oder in unmittelbarer Nähe der Masseverteilung beschreiben, so muß man eine andere Reihenzerlegung wählen.

²Dabei sind die $P_n(\cos \theta)$ Spezialfälle der Kugelfunktionen, nämlich rotationssymmetrische Kugelfunktionen.

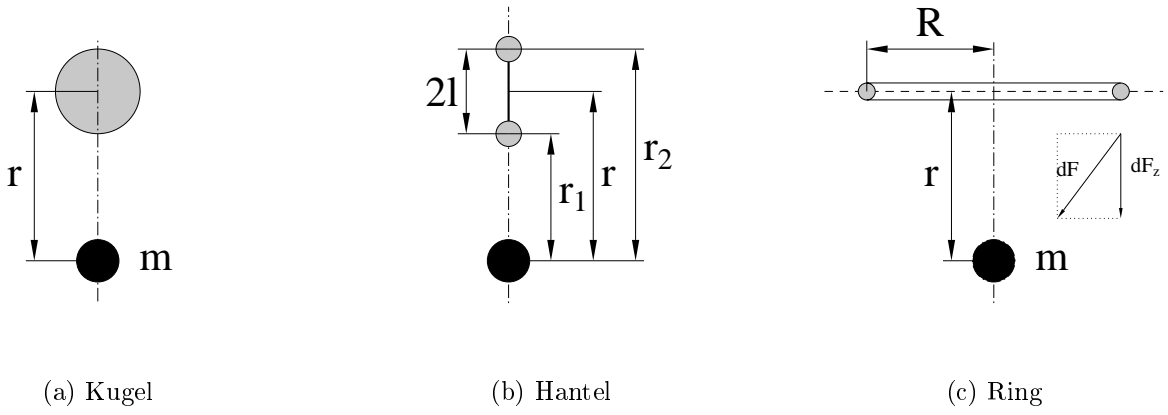


Abbildung 5.1: Verschiedene Testkörper im Feld einer Punktmasse

berechnen oder versuchen, sie aus der Messung des Außenfeld zum Beispiel auf der Achse $\theta = 0$ zu bestimmen. Die Koeffizienten B_n charakterisieren vollständig das Feld im Außenraum ($r > r_{min}$), erlauben aber keine Rückschlüsse auf die Masseverteilung oder das Feld im Bereich ($r < r_{min}$).

Aus dem Potential kann die Kraft berechnet werden, die die Masseverteilung auf eine Punktmasse m_2 ausübt, die sich im Punkt (r, θ, φ) befindet. Für die Kraftkomponente F_z in Richtung ihrer Symmetrieachse der Körper (der z -Achse in kartesischen Koordinaten) gilt:

$$F_z = -m_2 \frac{dU_G}{dz} = -m_2 \left[\frac{\partial U_G}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} + \frac{\partial U_G}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right]. \quad (5.3)$$

Unter Berücksichtigung der Beziehungen für die Legendre Polynome folgt:

$$F_z(r, \theta) = m_2 \sum_{p=0}^{\infty} (2p+1) B_{2p} \frac{P_{2n+1}(\cos \theta)}{r^{2p+2}}. \quad (5.4)$$

Um das Ergebnis besser mit dem Verhalten einer Kugel mit gleichem Schwerpunkt vergleichen zu können, normiert man die Koeffizienten $k_i = B_i / (G_g m)$:

$$F_z(r, \theta) = \frac{G_g m_2 m}{r^2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p+1) k_{2p} P_{2n+1}(\cos \theta)}{r^{2p}}, \quad (5.5)$$

wobei m die Masse des Rotationskörpers ist. Die Koeffizienten k_i werden auch als Momente der Masseverteilung bezeichnet.

5.2 Momente eines Doppelringes

Ausgangspunkt für die Berechnung der Momente allgemeiner symmetrischer Rotationskörper ist die Momentzerlegung des Potentials eines Doppelringes. Dieser besteht aus zwei dünnen

Die Kugelfunktionen ergeben sich bei der Separation der Laplacegleichung für das Potential $\Delta U_G = 0$ nach Kugelkoordinaten. Zur Reihenzerlegung beliebiger Masseverteilungen wären noch weitere Kugelfunktionen erforderlich. Durch die Symmetrie des Körpers und damit des Potentials vereinfacht sich jedoch der Ausdruck erheblich.

Ringen mit dem Radius R und dem Abstand $2l$. Im folgenden wird die Kraft auf eine Punktmasse auf der Symmetrieachse betrachtet.

Für die Kraft, die ein einzelner Ring auf eine Punktmasse (Abstand r) auf der Achse ausübt, gilt entsprechend Gl. (5.1):

$$F_1(r) = \frac{G_g m_2 m}{r^2} \left(\sqrt{1 + \frac{r^2}{R^2}} \right)^{-3}. \quad (5.6)$$

Substituiert man $y = r^2/R^2$ und entwickelt man den Ausdruck $(1 + y)^{-3/2}$ an der Stelle $y = 0$ in eine Taylor-Reihe, so erhält man:

$$F_1(r) = \frac{G_g m_2 m}{r^2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{2n} n! n!} \frac{R^{2n}}{r^{2n}} \right]. \quad (5.7)$$

Für die Kraft F_2 des Doppelrings (Abständen der Teilringe von der Punktmasse $r + l$ bzw. $r - l$, Masse der Teilringe $m/2$) auf die Punktmasse gilt damit:

$$\begin{aligned} F_2(r) &= \frac{1}{2} [F_1(r + l) + F_1(r - l)] \\ &= \frac{G_g m_2 m}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)!}{2^{2n} n! n!} R^{2n} \left[\frac{1}{(r + l)^{2n+2}} + \frac{1}{(r - l)^{2n+2}} \right]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Formt man den Ausdruck in der Klammer um, entwickelt $1/(1 \pm l/r)^{2n+2}$ nach r/l in eine Taylor-Reihe und führt eine Umbenennung der Indizes durch, so erhält man:

$$\begin{aligned} F_2(r) &= \frac{G_g m_2 m}{r^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n (2p+1)!}{2^{2n} n! n! (2(p-n))!} \frac{R^{2n} l^{2(p-n)}}{r^{2p}} \\ &= \frac{G_g m_2 m}{r^2} \sum_{p=0}^{\infty} (2p+1) \frac{k_{2p}}{r^{2p}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\text{mit:} \quad k_{2p} = \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n (2p)!}{2^{2n} n! n! (2(p-n))!} R^{2n} l^{2(p-n)}. \quad (5.10)$$

Wie man sieht, stimmt die Struktur von Gl. (5.9) mit der Momentzerlegung Gl. (5.5) für $\theta = 0$ überein. Daher entsprechen die in Gl. (5.10) angegebenen Ausdrücke den Momenten des Doppelringes. Man beachte dabei, daß die Herleitung nur für $r > l$ gilt, d.h. daß die Punktmasse nicht zwischen den beiden Ringen liegen darf.

5.3 Momente eines Rotationskörpers

Ein beliebiger Rotationskörper läßt sich als Summe aus unendlich vielen infinitesimal kleinen Doppelringen mit der Masse dm zusammensetzen. Die Masseelemente ergeben sich aus Umfang ($2\pi R$), Querschnitt ($dldR$) und Dichte ($\rho(R, l)$) der Doppelringe ($dm = 2 \cdot 2\pi R \cdot \rho(R, l) \cdot dR dl$). Damit ergibt sich für die Gesamtkraft $F_g(r)$ des Körpers auf die Punktmasse:

$$F_g(r) = \int \int 4\pi R \rho(R, l) G_g m_2 \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(2p+1) \cdot \tilde{k}_{2p}(R, l)}{r^{2p+2}} dR dl, \quad (5.11)$$

wobei $\tilde{k}_{2p}(R, l)$ die Momente eines Doppelringes mit dem Radius R und dem Ringabstand $2l$ (siehe Gl. (5.10)) sind. Man beachte, daß die Integration nur von 0 bis l_{max} erfolgt, da die zweite Hälfte des Körpers bereits in der Formel berücksichtigt ist. Für die Gesamtmasse des Rotationskörpers gilt:

$$m_g = \int dm = \int \int 4\pi R \rho(R, l) dl dR . \quad (5.12)$$

Durch Koeffizientenvergleich von Gl. (5.11) und Gl. (5.5) folgt für die Momente des Rotationskörpers:

$$k_{2p} = \frac{\int \int 4\pi R \rho(R, l) \tilde{k}_{2p}(R, l) dl dR}{\int \int 4\pi \rho(R, l) dl dR} . \quad (5.13)$$

Für homogene Körper mit konstanter Dichte kann man ρ herauskürzen. Bei solchen Körpern hängt das Moment nicht vom Material, sondern nur von der Form ab.

5.4 Momente eines Zylinders

In diesem Abschnitt sollen die Momente eines einfachen homogenen Zylinders mit dem Radius R_0 , der Höhe $2l_0$ und der Dichte ρ_0 berechnet werden. Für die Masse des Zylinders ergibt Gl. (5.12) die bekannte Beziehung:

$$m = 4\pi \rho_0 \int_0^{R_0} \int_0^{l_0} R dl dR = 2\pi R_0^2 l_0 \rho_0 . \quad (5.14)$$

Für das 2. Integral in Gl. (5.13) gilt:

$$\begin{aligned} \bar{K}_{2p} &= 4\pi \rho_0 \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n (2p)!}{2^{2n} n! n! (2(p-n))!} \int_0^{R_0} \int_0^{l_0} R^{2n+1} l^{2(p-n)} dl dR \\ &= 4\pi \rho_0 \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n (2p)!}{2^{2n} n! n! (2(p-n))!} \frac{R_0^{2n+2} l_0^{2(p-n)+1}}{(2n+2)(2(p-n)+1)} . \end{aligned} \quad (5.15)$$

Damit erhält man für die Momente des Zylinders:

$$k_{2p} = \frac{\bar{K}_{2p}}{m} = \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n (2p)!}{2^{2n} n! (n+1)! (2(p-n)+1)!} R_0^{2n} l_0^{2(p-n)} . \quad (5.16)$$

Dies stimmt mit den aus der Literatur [69] bekannten Beziehungen überein. Obwohl die Formel auf den ersten Blick etwas kompliziert aussieht, ergeben sich für die ersten Momente relativ einfache Ausdrücke:

$$\begin{aligned} k_2(R, l) &= \frac{1}{3} l^2 - \frac{1}{4} R^2 , \\ k_4(R, l) &= \frac{1}{5} l^4 - \frac{1}{2} R^2 l^2 + \frac{1}{8} R^4 , \\ k_6(R, l) &= \frac{1}{7} l^6 - \frac{3}{4} R^2 l^4 + \frac{5}{8} R^4 l^2 - \frac{5}{64} R^6 , \\ k_8(R, l) &= \frac{1}{9} l^8 - R^2 l^6 + \frac{7}{4} R^4 l^4 - \frac{35}{48} R^6 l^2 + \frac{7}{128} R^8 , \\ k_{10}(R, l) &= \frac{1}{11} l^{10} - \frac{5}{4} R^2 l^8 + \frac{15}{4} R^4 l^6 - \frac{105}{32} R^6 l^4 + \frac{105}{128} R^8 l^2 - \frac{21}{512} R^{10} . \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.5 Zusammengesetzte Körper

Reale Rotationskörper setzen sich meist aus wenigen einfachen Grundformen zusammen, wie z.B. Abschnitte mit konstantem Radius oder konische Bereiche. Um die Momente eines komplizierteren Körpers zu berechnen, zerlegt man ihn in seine Grundformen, wie Zylinder oder Doppelkegel, berechnet die Momente und Massen der Teilkörper und ermittelt aus diesen Ergebnissen das Moment des zusammengesetzten Körpers. Dabei gilt:

$$k_{2p}^G = \frac{\sum_i k_{2p}^{(i)} m_i}{\sum_i m_i}, \quad (5.18)$$

wobei $k_{2p}^{(i)}$ das Moment $2p$ des Teilkörpers i und m_i dessen Masse ist. Die Teilkörper müssen jedoch symmetrische Rotationskörper sein, deren Schwerpunkt im Koordinatenursprung liegt. Besitzt der Körper einen Hohlraum, wie z.B. ein Hohlzylinder, so muß man zum einen das Moment und die Masse für den Vollkörper ohne Hohlraum berechnen. Außerdem berechnet man das Moment und die Masse eines Körpers mit der Form des Hohlraumes und der Dichte des Vollkörpers und multipliziert die dabei erhaltene Masse mit -1 . Das Gesamtmoment kann dann ebenfalls mit Gl. (5.18) berechnet werden.

Für einen einfachen Hohlzylinder mit dem Außenradius R_a , dem Innenradius R_i , der Höhe $2l$ und der Dichte ρ ergibt sich damit für die Masse m und das gewichtete Moment $\bar{K}_{2p} = k_{2p}m$:

$$m = m_a + m_i = 2\pi R_a^2 l \rho - 2\pi R_i^2 l \rho = 2\pi \rho l (R_a^2 - R_i^2), \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{2p} &= k_{2p}^a m_a + k_{2p}^i m_i = \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n (2p)! \cdot l_0^{2(p-n)}}{2^{2n} n! (n+1)! (2(p-n)+1)!} (R_a^{2n} m_a + R_i^{2n} m_i) \\ &= 2\pi l \rho \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n (2p)!}{2^{2n} n! (n+1)! (2(p-n)+1)!} l_0^{2(p-n)} [R_a^{2n+2} - R_i^{2n+2}]. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Für das Moment des Hohlzylinders ergibt sich somit:

$$k_{2p} = \sum_{n=0}^p \frac{(-1)^n (2p)!}{2^{2n} n! (n+1)! (2(p-n)+1)!} \frac{l_0^{2(p-n)} [R_a^{2n+2} - R_i^{2n+2}]}{R_a^2 - R_i^2}. \quad (5.21)$$

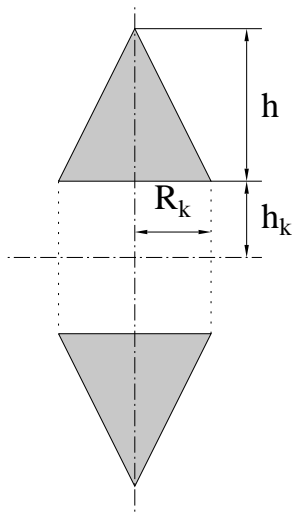
Dies bedeutet für die ersten Momente des Hohlzylinders:

$$\begin{aligned} k_2 &= \frac{1}{3} l^2 - \frac{1}{4} (R_a^2 + R_i^2) \\ k_4 &= \frac{1}{5} l^4 - \frac{1}{2} l^2 (R_a^2 + R_i^2) + \frac{1}{8} (R_a^4 + R_a^2 R_i^2 + R_i^4). \end{aligned} \quad (5.22)$$

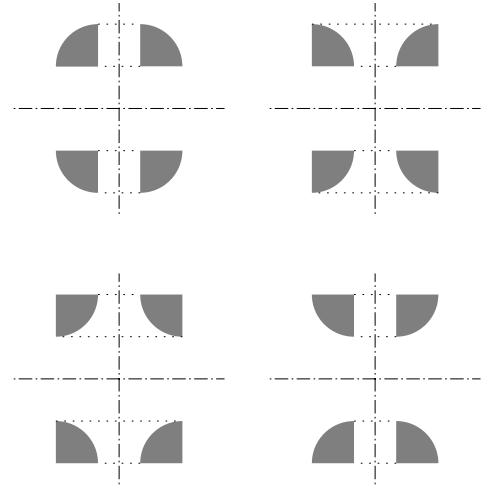
Dabei ist zu beachten, daß das k_2 -Moment sowohl bei der Reduzierung des Innenradius als auch bei der Reduzierung des Außenradius zunimmt.

5.6 Weitere Körper

Im Rahmen der Optimierung der Testkörper für unser Experiment und für die STEP-Mission wurden analytische Formeln für die Berechnung der Momente eines Doppelkegels und für Abschnitte mit runden Kanten hergeleitet.



(a) Doppelkegel



(b) Grundformen der Krümmung

Abbildung 5.2: Grundformen zur Berechnung der Momente

Bei konischen Abschnitten hat man zu unterscheiden, ob sich der Körper nach außen oder in Richtung der Mittelebene verjüngt. Als Beispiel wird hier nur der erste Fall behandelt (siehe Abb. 5.2(a)). Ein allgemeiner Doppelkegel wird durch die Größen Radius des Kegels R_k , Höhe des Kegels h und dem Abstand der Grundflächen der beiden Teilkegel $2h_k$ charakterisiert.

Für die Oberfläche des Kegels gilt:

$$l_1 = h_k, \quad l_2(r) = h_k + h - \frac{r \cdot h}{R_k}. \quad (5.23)$$

Damit folgt für die Masse und das gewichtete Moment:

$$m = 4\pi\rho \int_0^{R_k} \int_{l_1}^{l_2} r \, dr = 4\pi\rho \int_0^{R_k} r(h - hr/R_k) \, dr = \frac{2}{3}\pi\rho R_k^2 h, \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{2p} = & 4\pi\rho \sum_{n=0}^p \left[\frac{(-1)^n (2p)!}{2^{2n} n! n! (2(p-n)+1)!} \cdot \right. \\ & \left. \int_0^R r^{2n+1} [(h_k + h - rh/R)^{2(p-n)+1} - h_k^{2(p-n)+1}] \, dr \right]. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Da der Ausdruck im Integral ein Polynom von r ist, läßt sich die Funktion problemlos analytisch integrieren und man erhält wieder ein Polynom. Da insbesondere die höheren Momente relativ lange analytische Ausdrücke ergeben, soll hier nur das Ergebnis für k_2 angegeben werden:

$$k_2 = \frac{h^2}{10} + \frac{h_k h}{2} + h_k^2 - \frac{3R_k^2}{20}. \quad (5.26)$$

Bei den abgerundeten Kanten hat man insgesamt vier verschiedene Fälle entsprechend der 4 Quadranten des Kreises zu unterscheiden (siehe Abb. 5.2(b)). Je nach Richtung der Krümmung muß jeweils eine eigenen Herleitung erfolgen. Als Grundform wurde ein Ring gewählt, dessen

Querschnitt durch zwei senkrecht aufeinanderstehende Linien und einen 90 Grad Kreissektor begrenzt ist. Als freie Parameter ergeben sich der senkrechte Abstand der Ringe von der Symmetrieebene l , der Innenradius des Ringes R und der Krümmungsradius des Querschnitts r . Die Integrale lassen sich alle analytisch lösen und führen zu Polynomen aus Potenzen von l , R und r sowie gebrochenen Zahlen als Koeffizienten. Um Fehler zu vermeiden, wurde die analytische Integration mit Hilfe des Programmes MAPLE durchgeführt. Aus Platzgründen wird auf die entsprechenden Formeln an dieser Stelle verzichtet. Die erzielten Ergebnisse für die Testkörpergeometrie des STEP-Projektes, zeigten eine gute Übereinstimmung mit anderen numerischen Vergleichsrechnungen [70].

5.7 Optimierung der Testkörper

In einem realen Meßsystem befinden sich in der Nähe der Testkörper eine Vielzahl weiterer Massen, die in gravitativer Wechselwirkung mit den Testmassen stehen. Man kann zwar versuchen, die Kräfte zu berechnen, die diese Massen auf die Testkörper ausüben. Dies wäre jedoch sehr aufwendig und auch nur bedingt möglich, da einige Größen, wie z.B. die genaue Menge und Position des Heliums während des Flugs, nicht genau bekannt sind. Auch Gravitationsanomalien durch den Turm und dessen Umgebung sind nicht mit der hinreichenden Genauigkeit bekannt. Dies ist auch einer der Gründe, warum eine konzentrische Anordnung der Testkörper mit gemeinsamen Schwerpunkt gewählt wurde. Wenn die Schwerpunkte zusammenfallen, wirkt sich der Gradient der Fallbeschleunigung in gleicher Weise auf die Beschleunigung der Testkörper aus. Sieht man von Gravitationsanomalien ab, so können die höheren Ableitungen der Fallbeschleunigung der Erde für unser Experiment vernachlässigt werden. Die höheren Gradienten des Gravitationsfeldes werden vorwiegend von Störmassen in der Nähe der Testkörper erzeugt.

Um auch den Einfluß dieser Massen auf die Differenzbeschleunigung der Körper zu unterdrücken, strebt man daher an, daß die beiden Testkörper im Feld einer benachbarten punktförmigen Störmasse die gleiche Beschleunigung erfahren. Da dies für einen möglichst großen Abstandsbereich der Störmasse gelten soll, müssen dazu die Momente der Testkörper möglichst gut übereinstimmen. Ein vollständiger Abgleich aller Momente würde nur für zwei Hohlkugeln gelingen, die jedoch aus technologischen Gründen nicht als Testmassen in Frage kommen.

Bei der Optimierung muß man daher Kompromisse eingehen. Am wichtigsten ist es dabei, daß zumindest die niedrigen Momente wie k_2 und k_4 möglichst gut übereinstimmen. Die höheren Momente spielen nur für Störmassen in unmittelbarer Nähe der Körper eine Rolle. Die Masseverteilung in diesem Gebiet kann man jedoch genau bestimmen.

Der Möglichkeit zur Optimierung der Testmassen sind enge technologisch bedingte Grenzen gesetzt (siehe auch schematische Darstellung des Meßsystems Abb. 2.2).

- Die Wandstärke der Körper darf nicht zu dünn werden. (mechanische Stabilität, Auflage für Hebemechanismus)
- Innerer und äußerer Körper benötigen einen gewissen radialen Mindestabstand (Platz für horizontale Stabilisierung).

- Der Innenradius und die Höhe des inneren Körpers dürfen nicht zu klein werden (horizontale Stabilisierung).
- Der Außenradius und die Höhe des äußeren Körpers dürfen nicht zu groß werden (Masse, Platz).
- Es müssen hinreichend große Angriffsflächen für die Tragespulen vorhanden sein.
- Vor allem der äußere Körper darf nicht zu schwer werden.

Aufgrund der Vielzahl teilweise nicht genau feststehender Nebenbedingungen wurde auf eine automatische numerische Optimierung verzichtet. Statt dessen wurde ein Programm erstellt, das es erlaubte, einzelne Parameter kontinuierlich zu verändern, und die zugehörigen Momente anzeigte. Als Ausgangspunkt der Optimierung diente der Innenradius, die Mindesthöhe und die Mindestwandstärke des inneren Körpers. Damit blieben zur Variation nur noch Außenradius und Höhe des Bereiches in der Nähe der Symmetrieebene, des sogenannten Belts (siehe Abb. 2.2). Diese wurden so aufeinander abgestimmt, daß sich $k_2 = 0$ ergab. Die Genauigkeit dieses Abgleichs ist nur durch Fertigungstoleranzen bestimmt. Es blieb also effektiv nur ein Parameter, der variiert werden konnte, nämlich der Außenradius. Die Höhe des Belts ergibt sich dann automatisch aus dem Abgleich von k_2 .

Durch die Wahl des Außenradius des Innenkörpers ist auch der Innenradius des Außenkörpers vorgegeben. Durch Variieren der Wandstärke, Höhe und Größe des Belts des Außenkörpers wurde einerseits das Moment k_2 auf 0 abgeglichen und andererseits versucht, k_4 möglichst gut an das Moment des Innenkörpers anzupassen. Letzteres ist jedoch nur bedingt gelungen, da man dabei einen Außenkörper mit einem zu großen Gewicht und einer zu großen Höhe erhalten würde. Die weitere Optimierung wurde daher beendet, nachdem sich keine signifikanten Verbesserung innerhalb der vorgegebenen Grenzen für die Maximalabmessungen erzielen ließen.

Die Momentanpassung ist dabei deutlich schlechter als bei den Testkörpern des STEP-Projektes. Dies liegt daran, daß dort ein deutlich kompakterer Innenkörper verwendet wird, der für unser Experiment zu kurz wäre und einen viel zu kleinen Innenradius besitzt (siehe z.B. [71]), um ihn beim Fallexperiment ausreichend horizontal zu stabilisieren. Außerdem gibt es unterschiedliche Anforderungen an die Flächen, an denen die Tragespulen bzw. die Detektorspulen angreifen. Für die von uns angestrebte Genauigkeit ist jedoch der Abgleich unserer Testkörper hinreichend. Die Form der Testkörper ist in Abb. 2.2 dargestellt. Die Wandstärke an der dünnsten Stelle des inneren Körpers (Rohrförmige Enden an beiden Seiten) beträgt 0,5 mm. Tests haben ergeben, daß das verwendete Hartblei bei dieser Dicke noch eine ausreichende Stabilität besitzt. Die beiden Körper haben jeweils eine Masse von ca. 300 g.

Positionierung der Körper

6.1 Vertikale Positionierung

6.1.1 Anforderungen

Der Arbeitsbereich des Detektors ist eng mit der Auflösung verbunden, da die SQUID-Elektronik nur einen begrenzten Fluß gegenkoppeln kann. Nach dem Erreichen des maximalen rückgekoppelten Flusses Φ_R wird der Integrator auf 0 zurückgesetzt und die Elektronik strebt den nächsten Arbeitspunkt an. Geschieht dies schnell genug, so kann man auch nach dem Rücksetzen eindeutig auf den Fluß zurückschließen. Bei einer Reihe von Anwendungen kann man somit durch Zählen der Rücksetzimpulse den Dynamikbereich erheblich erweitern.

Für Präzisionsmessungen sollte man jedoch ein Rücksetzen der Elektronik vermeiden. Je nach gewähltem Steuerbereich¹ besitzt die Kombination aus SQUID und Steuerelektronik einen Dynamikbereich (Verhältnis zwischen Meßbereich und Auflösungsvermögen) in der Größenordnung von $10^6/\sqrt{Hz}$. Bei einer angestrebten Auflösung von 10^{12} m (bei 1 s Meßzeit) ergibt sich nur noch ein Meßbereich von ca. $\pm 1 \mu\text{m}$. Man kann die enorme Empfindlichkeit des Positionsdetektors nur ausnutzen, wenn man dafür sorgt, daß die Testkörper während der Messung den Meßbereich nicht verlassen. Daher sollte die Geschwindigkeit der Körper während der Messung weniger als $0,5 \mu\text{m/s}$ betragen. Es sind sogar noch kleinere Geschwindigkeiten wünschenswert, da mit wachsender Geschwindigkeit auch die Meßfehler im System zunehmen. So hängt der dynamische Fehler durch Tiefpässe und die SQUID-Elektronik (siehe Kap. 3.7.4) von der Änderungsgeschwindigkeit des Signals ab. Auch der Einfluß der Nichtlinearität des Detektors nimmt mit wachsender Geschwindigkeit zu (siehe Kap. 8.4).

Wegen des Gradienten des Gravitationsfeldes sollten die Schwerpunkte der beiden Testkörper mit einer Genauigkeit von $1 \mu\text{m}$ übereinstimmen. Es ist zwar auch nachträglich möglich, den Einfluß des Gradienten des Gravitationsfeldes der Erde aus den Meßergebnissen herauszurechnen, wenn man die Absolutposition hinreichend genau kennt. Im Falle von Gravitationsanomalien und unbekannten Störmassen würde dies jedoch nicht mehr gelingen. Die Form der Körper ist zwar so optimiert, daß diese im Feld externer Massen die gleiche Beschleunigung erfahren. Diese Optimierung gilt jedoch nur für den Fall übereinstimmender Schwerpunkte.

Die Anforderungen an die Geschwindigkeit setzen natürlich auch Grenzen für die erlaubte Restbeschleunigung des Meßsystems. Diese sollte 10^{-6} m/s^2 nicht überschreiten, da sonst die Geschwindigkeit innerhalb der Meßzeit zu stark ansteigt und der Körper bereits aufgrund der Restbeschleunigung den Meßbereich verläßt. Die Beschleunigungen durch hochfrequente Schwingungen ($f > 100Hz$) des Meßsystems dürfen natürlich größere Werte haben, da diese

¹Man kann zwar den Steuerbereich der SQUID-Elektronik auch auf $100 \Phi_0$ oder höher erweitern. Jedoch leidet dann meist die Geschwindigkeit der Elektronik und eventuell auch das Auflösungsvermögen. Es empfehlen sich daher Meßbereiche von $1 - 10 \Phi_0$.

im zeitlichen Mittel stärker unterdrückt werden. Sollte die Restbeschleunigung der Kapsel zu groß sein, so kann man durch den Einsatz eines differentiellen Detektors den Einfluß dieser Beschleunigung unterdrücken.

Bei Freigabe der Kapsel wird das Meßsystem heftig erschüttert. Solange nämlich die Kapsel im Turm hängt, werden alle Komponenten in Folge ihres Eigengewichts vorgespannt. Wird die Kapsel freigegeben, so ziehen sie sich schlagartig zusammen. Erste Abwürfe haben gezeigt, daß die Testkörper dabei eine Geschwindigkeit von bis zu 1 cm/s erreichen und damit innerhalb kürzester Zeit mit der gegenüberliegenden Seite kollidieren. Dabei leidet auch die radiale Zentrierung der Körper. Die Körper sollten daher bis zur Freigabe des Freeflyers fest auf die Unterlage gepreßt werden.

Man benötigt damit eine Steuerung, die die Testkörper zu Beginn des Abwurfes fest auf die Unterlage preßt und nach dem Abklingen der Störungen in möglichst kurzer Zeit aus der Ausgangsposition in die Mitte des Arbeitsbereiches befördert, dort abbremst und am gewünschten Ort positioniert. Nach dem Ende der Positionierung sollte die Steuerung komplett abgeschaltet werden, so daß keine weitere Rückwirkung auf die Körper erfolgt.

Um die Körper in senkrechter Richtung zu positionieren, benötigt man zum einen Informationen über die Position der Körper und zum anderen die Möglichkeit, gezielt Kraft auf die Körper auszuüben.

Da die Kraft berührungslos ausgeübt werden soll, kommt entweder eine elektrostatische [72] oder eine magnetische Positionierung in Frage. Um zum Beispiel eine anziehende elektrostatische Kraft nach oben auf den Körper auszuüben, befestigt man zwei Elektroden oberhalb des Testkörpers, die mit einer Spannungsquelle verbunden sind. Auf dem Testkörper befindet sich eine freie Gegenelektrode. Die Anordnung wirkt damit als Reihenschaltung zweier Kondensatoren. Je nach Abstand des Testkörpers ändert sich die Kapazität der Kondensatoren. Die Kraft, die dabei auf den Körper ausgeübt wird, ist proportional zum Quadrat der angelegten Spannung und proportional zur Ableitung der Kapazität nach der Position. Um die Körper in ausreichend kurzer Zeit zu positionieren, benötigt man jedoch Spannungen in der Größenordnung von einigen hundert Volt.

In unserem Meßsystem wurde eine magnetische Positionierung gewählt. Dazu befinden sich ober- und unterhalb des Körpers Ringspulen, die eine abstoßende Kraft auf den supraleitenden Körper ausüben. Diese Kraft ist proportional zum Quadrat des fließenden Stroms und zur Ableitung der Induktivität nach der Position.

6.1.2 Positionierung

Als erstes wurde untersucht, wie man den zeitlichen Verlauf der Kraft wählen muß, um bei bekannter Anfangsgeschwindigkeit v_0 und bekannter Anfangsposition x_0 den Körper möglichst schnell am gewünschten Ort ($x = 0$) zur Ruhe zu bringen. Als Nebenbedingung wurde dabei angesetzt, daß der Betrag der Beschleunigung nicht größer als a_0 sein darf. Ohne diese Nebenbedingung hat die Fragestellung keinen Sinn, da die Körper sonst (in der Theorie) beliebig schnell positioniert werden könnten. Die Grenze für die Beschleunigung ergibt sich zum Beispiel aus dem maximalen Strom der Zuleitungen oder der gesteuerten Stromquelle. Bei der

Untersuchung wurde festgestellt, daß die schnellste Version der Steuerung darin besteht, den Körper mit zwei Impulsen mit maximalem Betrag der Beschleunigung aber entgegengesetzter Richtung zu positionieren. Man erkennt leicht, daß ein einzelner Impuls in der Regel nicht ausreicht, um den Körper zu stoppen. Bewegt sich der Körper zum Beispiel vom angestrebten Ziel weg, so kann man zwar mit einem einzelnen Impuls die Bewegungsrichtung umkehren. Um ihn im Ziel zu stoppen, benötigt man jedoch einen weiteren Impuls. Selbst wenn sich der Körper in die richtige Richtung bewegt und man ihn dort mit einem einzelnen Impuls zur Ruhe bringt, dauert dies in der Regel länger als bei der Verwendung von zwei Impulsen. Auch bei der Verwendung von 3 oder mehr Impulsen verlängert sich die Zeit zur Positionierung, wenn auch der Unterschied unter Umständen klein ist. Wird statt einer rechteckigen Impulsform ein langsamerer Anstieg bzw. Abfall der Kraft gewählt, so erhöht sich die Zeit zur Positionierung ebenfalls.

Ausgangspunkt zur Berechnung der Impulslängen sind die Bewegungsgleichungen während der Impulse mit der Beschleunigung a bzw. $-a$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_a(t_1) = x_0 + v_0 \cdot t_1 + \frac{a}{2}t_1^2, & v_1 &= x_b(t_1) = v_0 + at^2, \\ 0 &= x_b(t_1 + t_2) = x_1 + v_1 \cdot t_2 - \frac{a}{2}t_2^2, & 0 &= v_b(t_1 + t_2) = v_1 - at_2. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Dabei sind t_1 und t_2 die Länge der beiden Impulse, $x_a(t)$, $x_b(t)$, $v_a(t)$ und $v_b(t)$ die Bewegungsgleichungen während der Impulse und x_1 und v_1 die Position und die Geschwindigkeit am Ende des ersten Impulses und somit auch zu Beginn des zweiten Impulses. Entsprechend der möglichen Richtung des ersten Impulses ist dieses quadratische Gleichungssystem für die beiden Fälle $a > 0$ und $a < 0$ zu untersuchen und gegebenenfalls zu lösen. Dabei ergibt sich nur eine einzige physikalisch sinnvolle Lösung mit $t_1 > 0$ und $t_2 > 0$:

$$t_1 = -\frac{v_0}{a} + \sqrt{\frac{v_0^2}{2a^2} - \frac{x_0}{a}}, \quad t_2 = \sqrt{\frac{v_0^2}{2a^2} - \frac{x_0}{a}}. \quad (6.2)$$

Zur Bestimmung der Richtung des ersten Impulses muß eine Fallunterscheidung durchgeführt werden.

- Bewegt sich der Körper von der Mitte weg (Fall A: $x_0 > 0$ und $v_0 > 0$ bzw. Fall B: $x_0 < 0$ und $v_0 < 0$), so muß der Körper mit dem ersten Impuls abgebremst und in seiner Bewegungsrichtung umgekehrt werden. Der zweite Impuls mit entgegengesetztem Vorzeichen bringt ihn dann im Nullpunkt zur Ruhe. Dies bedeutet für Fall A: $a < 0$ und für Fall B: $a > 0$.
- Bewegt sich der Körper in Richtung der Mitte, so ist die Entscheidung etwas komplizierter.
 - Wenn $v_0^2/2 > |x_0 \cdot a|$ ist², so muß der Körper sofort gebremst werden. Bei $v_0 > 0$ muß also $a < 0$ sein. Der Körper durchläuft die Position $x = 0$ und kehrt während des ersten Impulses seine Bewegungsrichtung um. Mit dem zweiten Impuls wird er erneut abgebremst und kommt im Nullpunkt zur Ruhe.

²Dies bedeutet, daß die kinetische Energie des Körpers größer als der Betrag der potentiellen Energie bei eingeschalteter Spule ist (bezogen auf $x = 0$).

- Ist $v_0^2/2 < |x_0 \cdot a|$, so wird der Körper mit dem ersten Impuls solange beschleunigt, bis $v^2(t)/2 = |x(t) \cdot a|$ ist. Danach wird die Impulsrichtung umgekehrt und der Körper mit dem zweiten Impuls gestoppt.

Könnte man die Anfangsgeschwindigkeit und die Anfangsposition mit beliebiger Genauigkeit bestimmen und absolut rechteckförmige Impulse mit der exakten Länge ohne Zeitverzögerung erzeugen, so käme der Körper nach den beiden Impulsen zur Ruhe. In der Praxis ist jedoch die Messung der Position und der Geschwindigkeit mit Fehlern behaftet. Diese können zum Beispiel durch das Rauschen des Detektors oder das beschränkte Auflösungsvermögen des A/D-Wandlers verursacht werden. Aber auch Eigenschwingungen des Meßsystems wirken sich störend aus. Außerdem ist die Erzeugung der Impulse nicht ideal. So gibt es z.B. Schaltverzögerungen beim Ein- und Ausschalten der Spulen. Wegen der großen Induktivität steigt der Strom in den Tragespulen nur langsam an (Anstiegszeiten in unserem Meßsystem ca. 0,1 ms). Auch die Beschleunigung a ist nur mit beschränkter Genauigkeit bekannt. Damit hat der Körper am Ende des Impulspaars eine gewisse Restgeschwindigkeit und eine gewisse Positionsabweichung. Um diese Abweichung weiter zu verringern, wird erneut die Position und die Geschwindigkeit des Körpers bestimmt und der Körper durch ein weiteres Impulspaar positioniert. Bei der erneuten Positionsbestimmung kann dabei eine höhere Auflösung des Detektors verwendet werden, da sich der Körper kaum noch bewegt, also der Meßbereich verringert werden kann.

Mit wachsender Genauigkeit der Positionierung nimmt jedoch die Impulslänge immer mehr ab. Um zu verhindern, daß man Impulslängen im Bereich der Anstiegszeiten und Schaltverzögerungen erhält, sollte man mit wachsender Positioniergenauigkeit die Amplitude der Stromimpulse und damit die Beschleunigung a reduzieren. Während der Feinpositionierung werden Impulslängen im Bereich von 1–10 ms angestrebt.

Es erscheint durchaus realistisch, die Abweichung mit jedem Impulspaar um den Faktor 10 zu verringern³. Damit dürfte der Körper nach 3 bis 4 Impulspaaren die erforderliche Positioniergenauigkeit erreicht haben.

Die Positionierung untergliedert sich in 2 Abschnitte. Bei der Grobpositionierung wird der Körper aus der Ausgangslage, in der er zu Beginn des Abwurfes festgehalten wurde, mit einem Impuls bekannter Länge beschleunigt und durch einen Impuls vorgegebener Länge in der Nähe der Mitte abgebremst. Da der Körper immer aus der Anfangsposition mit der Geschwindigkeit 0 startet, ergibt sich für jeden Abwurf die gleiche optimale Länge der Impulse, wenn man von geringfügig verschobenen Ausgangslagen und dem Einfluß von Vibrationen absieht. Die Impulslängen können von Abwurf zu Abwurf weiter optimiert werden. Nach wenigen Abwürfen hat man die idealen Längen für die ersten beiden Impulse gefunden. Dabei spielt es auch keine Rolle, daß sich die Kraft mit dem Abstand von der Spule ändert. Die Dauer des ersten Impulspaars hängt von der maximal erzielbaren Kraft F , der Masse des Testkörpers m und

³Die Geschwindigkeits- und Positionsabweichungen sind eng miteinander verknüpft. Hat der Körper z.B. vor dem Impulspaar eine sehr geringe Restgeschwindigkeit, aber eine große Restabweichung, so wird man zwar die Restabweichung um den Faktor 10 verringern. Die Restgeschwindigkeit kann sich dabei jedoch geringfügig erhöhen. Ähnliches wird passieren, wenn zwar die Restabweichung gering ist, aber der Körper eine hohe Restgeschwindigkeit hat. Im Mittel soll sich der Betrag der Gesamtabweichung $\sqrt{v_0^2 + kx_0^2}$ (k - Normierungsfaktor) pro Impulspaar um den Faktor 10 verringern.

dem Abstand zwischen Ausgangslage und Arbeitsposition s ab. Nimmt man an, daß beide Spulen die gleiche konstanten Betrag der Kraft F erzeugen, so gilt:

$$t_1 = t_2 = \sqrt{2s \cdot m/F} . \quad (6.3)$$

Das heißt, die Dauer der beiden Impulse ist proportional zur Wurzel der Masse der Testkörper.

Bei der Feinpositionierung, die sich direkt an die Grobpositionierung anschließt, wird jeweils vor einem Impulspaar die Geschwindigkeit und die Position des Körpers bestimmt. Aufgrund der ermittelten Geschwindigkeit und Position wird entschieden, welche Impulsstärke benötigt wird und aus welcher Richtung der erste Impuls erfolgen muß. Sind Geschwindigkeit und Position zu klein, so wird die Messung eventuell mit größerer Empfindlichkeit wiederholt. Danach werden aus den Meßwerten die beiden Impulslängen berechnet und die beiden Spulen in der richtigen Reihenfolge mit den ermittelten Stromstärken angesteuert. Nach einer kurzen Wartezeit zum Einschwingen der SQUID-Elektronik wird die Geschwindigkeit und Position erneut bestimmt und es folgen gegebenenfalls weitere Impulspaare.

Für die Dauer der Feinpositionierung spielt die Masse des Körpers nahezu keine Rolle, da nach spätestens 2 Impulspaaren die Abweichung so gering ist, daß nicht mehr die maximale Beschleunigung gewählt wird. Für die Impulslänge ist es dann egal, ob ein Körper mit großer Masse und großer Kraft beschleunigt wird, oder ein Körper mit kleiner Masse und entsprechend kleinerer Kraft.

Die hier vorgestellte Variante der Positionierung hat den Vorteil, daß während der Messung die Spulen abgeschaltet sind. Durch das Übersprechen der Tragespulen, das sich nur begrenzt unterdrücken läßt, würde sich nämlich auch das Signal des SQUID-Positionsdetektors ändern, das im derzeitigen System als Positionssignal für die Steuerung dient.

Werden zwei Körper gleichzeitig positioniert, so sollte man vermeiden, daß während der Geschwindigkeitsmessung des einen Körper die Spule des zweiten Körpers geschaltet wird.

In der Regel hängt die Kraft der Spulen vom Abstand des Testkörpers ab. Nach der Grobpositionierung oder spätestens nach dem ersten Impulspaar der Feinpositionierung befindet sich der Körper jedoch nur noch in der Nähe der Mittelposition. Daher kann man während der Feinpositionierung davon ausgehen, daß die Kraft nicht von der Position abhängt. Die Beschleunigung durch die Spulen in der Nähe der Mittelposition und damit die Parameter für die Steuerung müssen aus Experimenten bestimmt werden. Mit wachsender Zahl der Versuche kann der Wert weiter optimiert werden.

6.1.3 Positionierung in zwei Phasen

Die im vorangehenden Kapitel vorgestellte Variante der Steuerung liefert zwar in der Theorie die schnellste Positionierung. Dies ist jedoch nur für die Grobpositionierung von Bedeutung, wenn tatsächlich die maximale Beschleunigung ausgenutzt wird. Bei der Feinpositionierung hängt die Dauer der Positionierung jedoch eher von der Präzision bei der Bestimmung der Geschwindigkeit und Position und von der Genauigkeit der verwendeten Parameter der Steuerung ab. Außerdem stellt die vorangehende Variante erhöhte Anforderungen an die Geschwindigkeit der Steuerung, da sich der Körper während der Berechnung der Impulslängen weiterbewegt.

Es zeigt sich, daß es nach der Grobpositionierung vor allem wichtig ist, die Geschwindigkeit der Testkörper möglichst schnell zu reduzieren, da sie sich sonst schnell wieder vom angestrebten Ziel entfernen. Daher werden die Abschnitte der Feinpositionierung noch einmal in zwei Phasen unterteilt. In der ersten Phase wird der Körper mit einem einzelnen Impuls gestoppt. In der zweiten Phase wird der Körper aus annähernder Ruhe durch zwei Impulse in die Nähe des Ziels verschoben. Dabei hat man genügend Zeit zur Berechnung der Impulslängen, da sich die Position des Körpers zwischen erster und zweiter Phase nur unwesentlich ändert. Außerdem werden dynamische Fehler bei der Bestimmung der Position vermieden, die bei ansteigenden Signalen auftreten können. Man benötigt damit statt zwei Impulsen drei Impulse. In der Theorie steigt die Dauer der Positionierung dabei nur geringfügig an. Wenn der Bremsimpuls und der nachfolgende Positionierimpuls in die gleiche Richtung weisen, ergibt sich in der Theorie sogar die gleiche Gesamtzeit. In der Praxis benötigt man wegen der zusätzlichen Positionsmessung zwischen dem ersten Impuls und dem folgenden Impulspaar eine zusätzliche Einschwingzeit für das SQUID-System und zusätzlich Zeit zur Messung der Position.

Bei der Berechnung der Impulslängen wird davon ausgegangen, daß sich die Beträge a_o bzw. a_u der Beschleunigungen durch obere und unter Tragespule unterscheiden dürfen. Für die Impulslänge des Bremsimpulses gilt:

$$t_1 = v_0/a , \quad (6.4)$$

wobei a entweder a_o oder $-a_u$ ist, je nachdem in welche Richtung sich der Körper bewegt. Für die Positionierimpulse gilt:

$$t_2 a_2 = t_3 a_3 , \quad \frac{a_2}{2} t_2^2 + \frac{a_3}{2} t_3^2 = |x_0| , \quad (6.5)$$

wobei a_2 und a_3 die Beträge der Beschleunigung des ersten bzw. zweiten Positionierimpulses sind und x_0 die Positionsabweichung zu Beginn des Impulspaares ist. Damit erhält man:

$$t_2 = \sqrt{\frac{2a_3|x_0|}{a_2(a_2 + a_3)}} , \quad t_3 = \sqrt{\frac{2a_2|x_0|}{a_3(a_2 + a_3)}} . \quad (6.6)$$

Die Reihenfolge der Impulse ergibt sich aus der Lage des Körpers x_0 . Der erste Impuls muß den Körper immer zuerst in Richtung der Mittellage beschleunigen.

Nach dem Ende der 3 Impulse wird erneut die Geschwindigkeit und die Position ermittelt und gegebenenfalls eine weitere Sequenz aus 3 Impulsen gestartet.

6.2 Horizontale Stabilisierung

6.2.1 Vorbetrachtungen

Die in Kapitel 3 vorgestellten Detektoren reagieren nicht nur, wie beabsichtigt, auf eine axiale Verschiebung der Körper, sondern auch auf radiale Verschiebungen oder ein Kippen der Testkörper (siehe Kap. 3.3.5). Man sollte sich daher bemühen, den Körper auf der Achse zu stabilisieren. Außerdem muß verhindert werden, daß die Testkörper mit den seitlichen Begrenzungen zusammenstoßen.

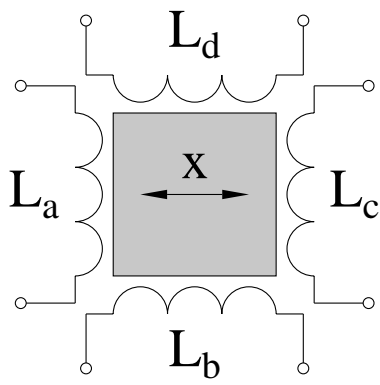
Um die angestrebte Genauigkeit bei der Überprüfung des SÄP zu erreichen, muß man daher die Freiheitsgrade der Testkörper durch eine horizontale Stabilisierung auf die axiale Richtung beschränken. Diese Stabilisierung sollte dabei möglichst keine Beschleunigung in axialer Richtung ausüben. Der Idealfall wäre natürlich eine aktive Steuerung, die (wie in Kapitel 6.1) für jeden der Freiheitsgrade die Position bestimmt und dann aktiv entsprechende Kraftimpulse auf die Körper ausübt. Es ist derzeit jedoch unklar, ob sich die notwendige Anzahl von Sensoren in der Nähe der Körper unterbringen lassen. Daher werden in diesem Kapitel Varianten der magnetischen Stabilisierung untersucht, die ohne zusätzliche Sensoren auskommen.

Die magnetische Stabilisierung auf der Basis des Meissnereffektes ist seit langem bekannt [73] und wird z.B. für die reibungsfreie Lagerung schnell rotierender Körper [74, 75] oder in supraleitenden Gravimetern [76] und ähnlichen Meßinstrumenten [77] genutzt. Insbesondere Hochtemperatur-Supraleiter haben eine Vielzahl neuer Anwendungsgebiete erschlossen [78]. Gute Ergebnisse bei der Stabilisierung zeigte der Einsatz starker Permanentmagnete. Dabei treten jedoch einige Probleme auf, wie z.B. das Einfrieren von Fluß (hohes Feld auch beim Einkühlen), hysteretische Kraftverläufe durch Eindringen von Flußschläuchen [79] und ein starkes Streufeld (Störung der Positionsmessung, Kraft auch in axialer Richtung), die den Einsatz dieser Stabilisierungsmethode bei unserem Experiment verbieten.

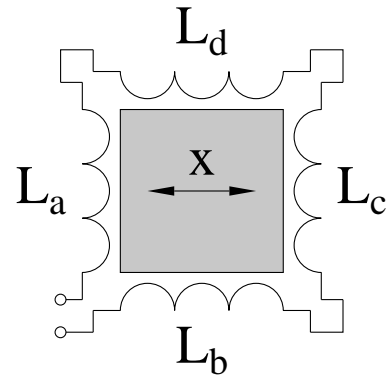
Bei der Beurteilung der Stabilisierung gibt es verschiedene Kriterien. Eines der wichtigsten ist die Steifheit der Anordnung in der Nähe des Gleichgewichtes, d.h. die Ableitung der zentrierenden Kraft nach der Position des Körpers. Sie kann bei konservativen Systemen aus der zweiten Ableitung der Energie nach der Auslenkung bestimmt werden und entspricht der Federkonstante bei einer Feder. Die Steifheit entscheidet über das Verhalten bei kleinen Auslenkungen.

Ein anderes wichtiges Kriterium ist die Energie, die benötigt wird, um den Körper von der Innenposition bis zur maximalen Auslenkung zu bewegen, im folgenden Stabilisierungsenergie genannt. Diese ist entscheidend bei größeren Auslenkungen, wenn man verhindern will, daß der Körper gegen die seitliche Begrenzung stößt. In diesem Fall muß die kinetische Energie des Körpers kleiner als die Stabilisierungsenergie sein.

Bei passiven Systemen interessiert man sich auch für die Dämpfung der Körper und wie schnell der Körper dadurch zur Ruhe kommt. Die Dämpfung hängt bei Systemen mit nichtlinearem Kraftverlauf natürlich auch von der Amplitude der Schwingung ab. Da man den Körper bei unserem Experiment mit hoher Präzision zentrieren will, ist jedoch vor allem die Dämpfung bei kleinen Auslenkungen von Interesse. Die optimale Dämpfung bei diesen Auslenkungen wird jedoch von der Steifheit des Systems, d.h. durch die Eigenfrequenz bei kleinen Auslenkungen, entscheidend mitbestimmt. Das Optimum dürfte näherungsweise durch den aperiodischen Grenzfall gegeben sein. Da die bei den Experimenten gemessenen Eigenfrequenzen bei 1–2 Hz liegen, dürfte der Körper auch bei optimaler Anpassung der Dämpfung in der kurzen Abwurfzeit kaum mit der erforderlichen Präzision passiv zu stoppen sein. Erst ab Eigenfrequenzen oberhalb von 20 Hz erscheint eine passive Dämpfung aussichtsreich. Man sollte also dafür sorgen, daß die Auslenkungen zu Beginn des Abwurfes möglichst gering sind.



(a) separate Speisung der Spulen



(b) Reihenschaltung

Abbildung 6.1: Varianten der Stabilisierung

6.2.2 Konfiguration der Spulen

Vorbetrachtungen

Im folgenden soll der Effekt verschiedener Schaltungen bei der horizontalen Stabilisierung diskutiert werden. Als Modell für den Testkörper wird statt des Kreiszylinders ein Quader mit quadratischen Querschnitt verwendet. An den 4 Seitenflächen befindet sich jeweils eine Spule, die den Körper abstößt und in der Mitte zentriert⁴. Dabei kann es sich sowohl um Flachspule, als auch um Segmente einer Mäanderspule handeln.

Die vier Spulen mit den Induktivitäten L_a , L_b , L_c und L_d werden als identisch angenommen. Es wird jeweils nur eine Bewegung in Richtung der Spulen L_a und L_c betrachtet. Dabei soll sich die Induktivität der beiden anderen Spulen nicht ändern. Bei Mittellage des Körpers sind die Induktivitäten der Spulen gleich $L_a(0) = L_b(0) = L_c(0) = L_d(0) = L_0$. Außerdem gilt wegen der Symmetrie $L_a(x) = L_c(-x)$ und somit:

$$\frac{dL_a}{dx}(0) = -\frac{dL_c}{dx}(0) = L' , \quad \frac{d^2L_a}{dx^2}(0) = \frac{d^2L_c}{dx^2}(0) = L'' . \quad (6.7)$$

Reihenschaltung

Die einfachste Methode der Stabilisierung ist eine Reihenschaltung aller vier Spulen. Man kann dabei auch auf die Unterteilung in einzelne Segmente verzichten und statt vier einzelner Spulen eine zusammenhängende Spule verwenden, die über den gesamten Umfang auf den Körper einwirkt. Die Gesamtinduktivität der Reihenschaltung ist dabei $L_g = L_a + L_b + L_c + L_d$. Bei zentrierter Position ist $L_{g0} = L_g(0) = 4L_0$.

Speist man einen Strom von I_0 bei Mittellage des Körpers ein und friert den erzeugten Fluß durch einen supraleitenden Schalter ein, so gilt für die Abhängigkeit des Stromes im Kreis von der Position x des Körpers :

$$I(x) = \frac{L_{g0} I_0}{L_g(x)} . \quad (6.8)$$

⁴Um die Körper effektiv gegen ein Verkippen zu stabilisieren, benötigt man noch vier weitere Spulen am unteren Ende des Körpers. Die folgenden Betrachtungen gelten in gleicher Weise auch für diesen Fall.

Für die magnetische Energie im Kreis gilt:

$$E = \frac{1}{2} I^2 L_g = \frac{(I_0 L_{g0})^2}{2 L_g} . \quad (6.9)$$

Damit erhält man für die Steifheit:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left[-\frac{(I_0 L_{g0})^2}{2 L_g^2} \frac{d L_g}{dx} \right] = + \frac{(I_0 L_{g0})^2}{L_g^3} \left(\frac{d L_g}{dx} \right)^2 - \frac{(I_0 L_{g0})^2}{2 L_g^2} \frac{d^2 L_g}{dx^2} . \quad (6.10)$$

Bei Gleichgewichtslage des Körpers $x = 0$ erhält man damit:

$$\frac{d^2 E}{dx^2}(0) = -\frac{I_0^2}{2} \frac{d^2 L_g}{dx^2} = -I_0^2 L'' . \quad (6.11)$$

Dabei ist bei Flachspulen, aber auch bei vielen anderen Spule-Körper-Geometrien $\frac{d^2 L}{dx^2} < 0$. Dies bedeutet, daß die abstoßende Kraft bei Annäherung an die Spule zunimmt. Damit ist $\frac{d^2 E}{dx^2} > 0$, d.h. die Anordnung verhält sich wie ein Feder-Masse-System, das den Testkörper zentriert. Selbstverständlich gibt es auch Geometrien bei denen $\frac{d^2 E}{dx^2} > 0$ ist, wobei dies bei dieser Anwendung nicht erwünscht wäre.

Die Stabilisierungsenergie ΔE hängt vom konkreten Verlauf der Induktivitäten und vom möglichen Bewegungsbereich des Körpers ab. Man kann aber unabhängig davon eine obere Grenze finden. Die Induktivität der Spule, auf die sich der Körper zu bewegt, bleibt auf jeden Fall positiv ($L_a(x) > 0$), während sich die Induktivität der gegenüberliegenden Spule gegenüber der Ausgangslage erhöht ($L_c(x) > L_0$). Damit gilt stets $4L_0 \geq L_g(x) > 3L_0$, woraus folgt:

$$\Delta E < \frac{I_0^2 (4L_0)^2}{2 \cdot 3L_0} - \frac{I_0^2 (4L_0)^2}{2 \cdot 4L_0} = \frac{2}{3} I_0^2 L_0 = \frac{I_0^2 L_{g0}}{6} . \quad (6.12)$$

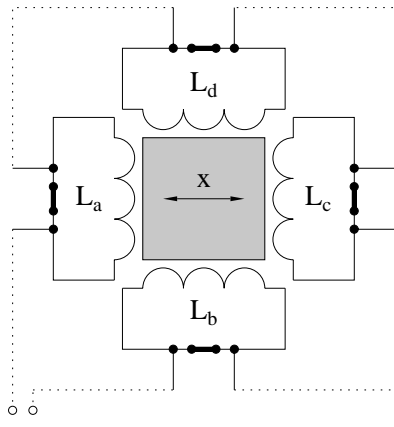
Friert man den Strom im Kreis nicht ein, sondern speist die Anordnung durch eine Stromquelle, so ergibt sich für die Steifheit der Anordnung $-dF/dx$ der gleiche Wert wie bei eingefrorenem Fluß. Die Stabilisierungsenergie ist jedoch kleiner, da der Strom im Kreis konstant bleibt und nicht wie beim eingefrorenen Fluß ansteigt. Ein eingefrorener Fluß liefert also eine bessere Stabilisierung. Der Unterschied ist jedoch nicht so dramatisch, da bei eingefrorenem Fluß der Strom bei der Auslenkung um weniger als ein Drittel ansteigt.

Der Vorteil der Reihenschaltung der Spulen ist, daß man nur ein Paar Zuleitungen benötigt und im Fall der externen Speisung auch nur eine Stromquelle. Der Nachteil ist, daß man den Körper nur sehr schlecht bremsen kann und sich die Gleichgewichtslage nicht nachjustieren läßt, falls die Spulen geringfügig unterschiedliche Induktivitätsverläufe besitzen.

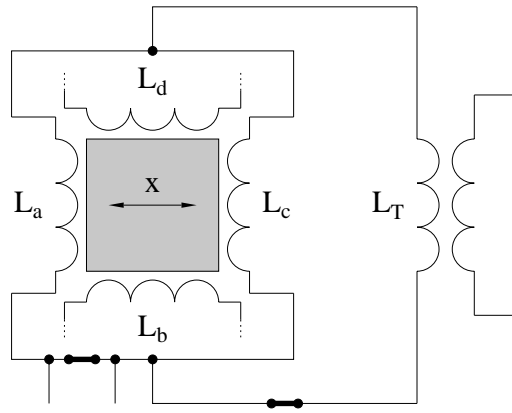
Einzeln kurzgeschlossene Spulen

Eine weitere Möglichkeit der Beschaltung besteht darin, parallel zu jeder Spule einen supraleitenden Schalter zu schalten und in jeder einzelnen Spule einen Fluß $I_0 \cdot L_0$ einzufrieren (siehe Abb. 6.2(a)). Damit ergibt sich als Gesamtenergie des Systems:

$$E = \frac{I_0^2 L_0^2}{2} \left[\frac{1}{L_a} + \frac{1}{L_b} + \frac{1}{L_c} + \frac{1}{L_d} \right] . \quad (6.13)$$



(a) Einzeln kurzgeschlossene Spulen



(b) Kopplung gegenüberliegender Spulen

Abbildung 6.2: Weitere Varianten der Kopplung der Stabilisierungsspulen

Da L_b und L_c konstant sind, folgt für die erste Ableitung:

$$\frac{dE}{dx} = -\frac{I_0^2 L_0^2}{2} \left[\frac{1}{L_a^2} \cdot \frac{dL_a}{dx} + \frac{1}{L_c^2} \cdot \frac{dL_c}{dx} \right]. \quad (6.14)$$

Für die zweite Ableitung gilt damit:

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = \frac{I_0^2 L_0^2}{2} \left[\frac{2}{L_a^3} \left(\frac{dL_a}{dx} \right)^2 + -\frac{1}{L_a} \frac{d^2 L_a}{dx^2} + \frac{2}{L_c^3} \left(\frac{dL_c}{dx} \right)^2 - \frac{1}{L_c} \frac{d^2 L_c}{dx^2} \right]. \quad (6.15)$$

Damit folgt für die Gleichgewichtslage ($x = 0$):

$$\frac{d^2 E}{dx^2} = I_0^2 \left[\frac{2(L')^2}{L_0} - L'' \right]. \quad (6.16)$$

Im Vergleich zur Reihenschaltung der Spulen erhöht sich damit die Steifheit um den Term $2I_0^2/L_0 \cdot (L')^2$. Dies hat insbesondere bei relativ linearen Induktivitätsverläufen große Bedeutung. Während dort bei einer Reihenschaltung die Federkonstante verschwindend gering ist, nimmt die Federkonstante bei einzeln kurzgeschlossenen Spulen deutlich größere Werte an.

Der Nachteil der Anordnung ist, daß man zusätzliche supraleitende Schalter benötigt. Die Zuleitungen für die Stromeinspeisung und die Schalter kann man jedoch wie in Abb. 6.2(a) jeweils in Reihe schalten. Damit würde man wie bei der ersten Schaltungsvariante ein Paar starke Zuleitungen für die Stromeinspeisung und ein Paar Zuleitungen für die supraleitenden Schalter benötigen, das alle Schalter gleichzeitig ansteuert. Man sollte allerdings dafür sorgen, daß die Schalter bei etwa dem gleichen Strom schalten. Es sollte also nicht bereits der erste Schalter thermisch überlastet sein, bevor der letzte geöffnet ist. Außerdem muß man für eine ausreichende Wärmeabfuhr sorgen, da alle Schalter gleichzeitig betrieben werden und sich bei hohen Strömen und geöffnetem Zustand auch selbst aufheizen können.

Die Stabilisierungsenergie kann man mit Hilfe von Gl. (6.13) berechnen. Dazu muß man nur die Induktivitäten der einzelnen Spulen bei Mittellage und bei Vollausschlag des Körpers kennen. Die Induktivität kann sich im Fall von Flachspulen mit dünnen Drähten bei Annäherung an eine supraleitende Ebene durchaus um den Faktor 2–4 gegenüber der Ausgangslage

verringern, während sich die Induktivität der gegenüberliegenden Spule kaum ändert. Es lassen sich also beträchtliche Stabilisierungsenergien erreichen. Dazu müssen sich möglichst viele Drähte möglichst dicht der supraleitenden Fläche nähern können. Bei gekrümmten Körpern ist dies nicht ganz so gut zu erreichen wie bei einer ebenen Fläche.

Die Spulen einzeln mit einer eigenen Stromquelle zu speisen, hat im Vergleich zu einer Reihenschaltung keinen Effekt auf die Steifheit oder auf die Stabilisierungsenergie. Man benötigt nur mehr Zuleitungen und Stromquellen (Energieverbrauch steigt). Man kann jedoch durch die separate Ansteuerung aktiven Einfluß auf die Position des Körpers nehmen.

Kopplung gegenüberliegender Spulen

Eine weitere Schaltungsvariante besteht darin, die jeweils gegenüberliegenden Spulen miteinander zu verbinden und parallel dazu einen supraleitenden Transformator zu schalten, über den die Bewegung des Körpers gesteuert oder auch gedämpft werden kann (siehe Abb. 6.2(b)). Wenn man von der Primärwicklung des Trafos absieht, entspricht diese Variante dem Schaltbild eines Positionsdetektors mit zwei Detektorspulen. Es gibt zwei verschiedene Orientierungen für die eingefrorenen Flüsse, die bei Mittellage des Körpers jeweils einen Strom I_0 in L_a und L_c hervorrufen. Es zeigt sich, daß die Variante, bei der kein Strom durch L_T fließt, eine höhere Steifheit bewirkt als die andere Variante. Für die Steifheit der ersten Variante gilt entsprechend Gl. (3.20):

$$\frac{d^2 E}{dx^2}(0) = I_0^2 \left[\frac{2 \frac{(L')^2}{L_0}}{1 + 2 \frac{L_T}{L_0}} - L'' \right]. \quad (6.17)$$

Die Steifheit ist damit stets kleiner als bei einzeln kurzgeschlossenen Spulen. Wie man sieht, geht die Gleichung für kleine Induktivitäten des Trafos L_T in die Beziehung für kurzgeschlossene Spulen über, während man für sehr große L_T die gleiche Beziehung wie bei einer Reihenschaltung von L_a und L_c erhält.

Über den Transformator kann man Einfluß auf die Position des Testkörpers nehmen. Schickt man einen Strom durch die äußeren Zuleitungen des Transformators, so wird ein zusätzlicher Fluß $\Delta\Phi_T$ in L_T erzeugt, der zu einer Änderung des Stromes in L_a und zu einer entgegengesetzten Änderung des Stromes in L_c führt. Damit wird die Gleichgewichtslage des Körpers verschoben.

6.3 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Es wurde ein Verfahren zur Positionierung der Testkörper entwickelt, daß in der Theorie ausreichen müßte, um den Körper innerhalb von 0,5 s in der Mitte des Meßbereiches mit der erforderlichen Genauigkeit zu stoppen. Voraussetzung dazu ist jedoch, daß die Absolutposition des Körpers mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden kann. Diese Bedingung würde jedoch für jede Form der aktiven Stabilisierung zutreffen. Im derzeitigen Meßsystem dient dazu das Signal des SQUID basierten Positionsdetektors. Dies bedeutet jedoch, daß die Empfindlichkeit des Detektors erheblich reduziert werden mußte, um eine Überschreitung der Anstiegsrate

und des Meßbereiches der SQUID-Elektronik während der Steuerphase zu verhindern. Ein weiteres Problem ist die hohe Empfindlichkeit des Detektors gegen seitliche Bewegungen, die dazu führt, daß ein konstantes Detektorsignal nicht unbedingt bedeutet, daß sich der Körper in Ruhe befindet. Aus diesem Grunde wäre ein eigener angepaßter Sensor für Positionsregelung empfehlenswert, der nur auf die Absolutposition in axialer Richtung reagiert.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine Steuerelektronik mit der entsprechenden Peripherie entwickelt und das Positionierverfahren sowohl im Labor (an einem Testmodell), als auch während der Fallexperimente erprobt. Dabei wurden gute Ergebnisse bei der Grobpositionierung des Körpers erzielt. Der Körper konnte aus der Ruhe in die Mitte bewegt werden und dort nach den beiden Impulsen zur Positionierung mit einem einzelnen Stoppimpuls auf eine Endgeschwindigkeit von ca. $30 \mu\text{m/s}$ abgebremst werden. Ein Test der Feinpositionierung war jedoch nicht möglich, da bei abgeschalteten Spulen eine ungeklärte Zusatzbeschleunigung (bis $10^{-3} g_0$) der Körper auftrat, die weit oberhalb der zu erwartenden Restbeschleunigung des Freeflyers liegt.

Es sind noch eine Reihe von Verbesserungen an der Steuerung möglich, um sie noch besser an die Erfordernisse der Feinpositionierung anzupassen. So ist derzeit die Auflösung der Geschwindigkeitsmessung noch nicht optimal. Die Geschwindigkeit wird numerisch aus den Differenzen der vom A/D-Wandler bestimmten Positionen ermittelt. Dies sollte durch eine analoge Differenzbildung (Sample and Hold-Schaltung) vor dem Wandler ersetzt werden, so daß die Auflösung des A/D-Wandlers besser genutzt und die Dauer der Geschwindigkeitsmessung verringert wird. Bei der Feinpositionierung werden sich auch Eigenschwingungen des Meßsystems stärker auf das Positionssignal auswirken. Zur Unterdrückung dieser Störungen müssen geeignete Verfahren in das Steuerprogramm integriert werden. Auch müssen entsprechende Algorithmen zur Auswahl der Empfindlichkeiten des Sensorsignals der Steuerung und zur Auswahl der Ströme in den Levitationsspulen entwickelt und optimiert werden. Dies kann jedoch erst geschehen, wenn die Probleme mit der Zusatzbeschleunigung und der Empfindlichkeit gegen seitliche Bewegungen beseitigt sind.

Ein großes Problem bei der Bestimmung von η ist die Empfindlichkeit des Detektors gegen seitliche Bewegungen. Es wurde zwar gezeigt, daß bei symmetrischer Anordnung der Körper und einer symmetrischen Verteilung des Flusses die Empfindlichkeit gegen radiale Bewegungen oder ein Verkippen verschwinden müßten. Sobald sich der Körper jedoch nicht exakt in der Mitte befindet oder seitliche Bewegung und Verkippen gleichzeitig auftreten, beeinflußt die seitliche Position das Signal. Es ist daher erforderlich, die Körper gegen seitliche Bewegungen zu stabilisieren und möglichst auf der Achse zu zentrieren, da dort der Einfluß der seitlichen Bewegung besonders stark unterdrückt wird.

Die Experimente mit einer durchgehenden Mäanderspule haben zwar gezeigt, daß diese ausreicht, um zu verhindern, daß der Körper gegen die seitliche Begrenzung stößt. Die seitliche Bewegung besitzt jedoch weiterhin einen erheblichen Einfluß auf das Signal. Durch eine Unterteilung der Spule in mehrere Segmente ließe sich zwar die Steifigkeit der Stabilisierung erhöhen, es bleibt aber fraglich, ob dies ausreicht, um den Einfluß der seitlichen Bewegung hinreichend zu unterdrücken, da steifere System nicht unbedingt kleinere Amplituden der

Schwingungen bewirken. Man benötigt daher noch eine Methode, um die seitlichen Schwingungsmoden zu dämpfen. Passive Dämpfungen scheinen dabei wegen der kurzen Fallzeit wenig Erfolg versprechend, es sei denn, es würde gelingen, die Steifheit der Stabilisierung erheblich zu erhöhen. Hohe Kräfte in radialer Richtung beinhalten jedoch immer die Gefahr, daß auch Kraftkomponenten in axialer Richtung auftreten, die die Bestimmung von η beeinträchtigen. Es wäre daher auf jeden Fall günstiger, wenn man die radiale Stabilisierung während der eigentlichen Messung ausschalten könnte. Daher ist eine aktive Zentrierung ähnlich der Steuerung in axialer Richtung der passiven Variante vorzuziehen. Allerdings werden dazu zusätzliche Sensoren und Zuleitungen für die Spulen der radialen Stabilisierung benötigt. Dies ist hinsichtlich des verfügbaren Platzes und des Wärmeeintrags über die Zuleitungen problematisch.

Datenauswertung

7.1 Das Auswerteverfahren

7.1.1 Modell

Um zwischen Störungen und Signal unterscheiden zu können, benötigt man sowohl ein Modell für die Störungen, als auch für das gesuchte Signal. Es ist von Vorteil, wenn sich das Signal durch ein Modell mit möglichst wenigen freien Parameter beschreiben läßt. Bei unserem Experiment verwendet man als Modell für das gesuchte Signal die Bewegungsgleichung des freien Falls:

$$s(t) = \gamma_3 \cdot t^2 + \gamma_2 t + \gamma_1 , \quad (7.1)$$

wobei die γ_i die Parameter sind, die bei der Datenauswertung bestimmt werden sollen. Für die Bestimmung des Eötvöskoeffizienten ist jedoch nur $\gamma_3 = a/2$ interessant, wobei a die Differenzbeschleunigung zum Bezugssystem ist.

Muß zusätzlich noch eine lineare Rückwirkung $k < 0$ (DGL der Bewegung: $\ddot{s} = k \cdot s + a$, a - zu bestimmende Beschleunigung) berücksichtigt werden, so verwendet man das Modell:

$$s(t) = b_3 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t + b_1 \quad \text{mit } \omega = \sqrt{-k} , \quad (7.2)$$

wobei ω die Eigenfrequenz des Systems ist, die bekannt sein muß. Die Information über die gesuchte Beschleunigung a steckt dabei im Parameter $b_1 = -a/k$. Für kleine ω geht das Modell (7.2) in das Modell (7.1) über. Bei $k > 0$ ergibt sich die Bewegungsgleichung:

$$s(t) = c_3 \cdot e^{\lambda t} + c_2 \cdot e^{-\lambda t} + c_1 \quad \text{mit } \lambda = \sqrt{k} . \quad (7.3)$$

Zum Parameter k trägt z.B. die Rückwirkung des Detektors, aber auch der Gradient des Gravitationsfeldes bei. Beim Experiment sollte möglichst $k \approx 0$ angestrebt werden, da die beiden anderen Modelle eine genaue Kenntnis der Absolutposition des Körpers bezüglich der Gleichgewichtslage der Rückwirkung voraussetzen. In den folgenden Kapiteln wird daher nur das Modell (7.1) behandelt.

Bei den Störungen wird ein thermisch verursachtes Rauschen mit einer oberen Grenzfrequenz ω_{max} angenommen. Die Rauschspannung $u(t)$ zu einem definierten Zeitpunkt t ist unabhängig normalverteilt. Gemeint ist dabei die Verteilung, die man erhält, wenn man bei einer Vielzahl von Versuchen die Rauschspannung jeweils zum selben Zeitpunkt t nach dem Versuchsbeginn ermittelt. Die Spannungswerte zu verschiedenen Zeitpunkten des gleichen Versuches können jedoch korrelieren. Das Rauschen wird durch eine Fourierreihe beschrieben:

$$u(t) = \sum_{k=1}^N [a_k \cos k\Delta\omega t + b_k \sin k\Delta\omega t] . \quad (7.4)$$

Die Frequenzdifferenzen der Fourierkoeffizienten $\Delta\omega$ sollen deutlich kleiner als das Inverse der Experimentierzeit sein. Die Anzahl der Fourierkoeffizienten N ist so gewählt, daß $N \cdot \Delta\omega \gg \omega_{max}$ ist, d.h. die Koeffizienten a_k und b_k gehen für große k gegen 0.

Die Fourierkoeffizienten a_k und b_k sind unabhängig¹ normalverteilte Zufallszahlen, die sich von Versuch zu Versuch ändern können. Verringert man die Auflösung der Fourierzerlegung des Rauschens, so strebt die Standardabweichung σ_k der Fourierkoeffizienten a_k bzw. b_k für kleine $\Delta\omega$ gegen die Beziehung:

$$\sigma_k^2 = \sigma^2(k \cdot \Delta\omega) \cdot \Delta\omega , \quad (7.5)$$

wobei die Standardabweichung der Sinus- und Cosinuskoeffizienten gleich ist. Dabei gibt die Funktion $\sigma(\omega)$ die spektrale Verteilung des Rauschens wieder.

Es wird weiterhin angenommen, daß sich das Meßsignal als Summe aus ungestörtem Signal und Rauschen zusammensetzt und daß das Rauschen nicht vom Verlauf des ungestörten Signals abhängt. Die Datenpunkte werden mit konstanter Samplingrate ermittelt, wobei angenommen wird, daß bei der Zeitmessung keine Fehler auftreten.

7.1.2 Grundlagen

Die Darstellung der Grundlagen und der Herleitung der späteren Formeln erfolgt etwas ausführlicher, da sich die in der Literatur behandelten Auswerteverfahren in der Regel nur auf Probleme mit unabhängigen Meßfehlern beziehen. Daher soll auch näher auf die Unterschiede zu unserem Problem eingegangen werden.

Bei der Diskussion eines Schätzverfahrens muß man zwei Begriffe klären. Der erste ist die *Erwartungstreue* des Verfahrens. Führt man einen Versuch mit den selben Bedingungen mehrfach durch und ermittelt für jeden Versuch mit Hilfe der selben Schätzfunktion einen Schätzwert, so heißt die Schätzfunktion *erwartungstreu*, wenn der Erwartungswert der Schätzwerte mit dem tatsächlichen Wert übereinstimmt. Dies bedeutet, daß der Mittelwert der Schätzwerte gegen den tatsächlichen Wert strebt. Man sollte daher möglichst eine erwartungstreue Schätzfunktion verwenden².

Vergleicht man zwei erwartungstreue Schätzfunktionen $\Gamma_1(x_1, \dots, x_n)$ und $\Gamma_2(x_1, \dots, x_n)$, die aus den Datenpunkten x_1, \dots, x_n Schätzwerte für den Parameter γ erzeugen, so heißt Γ_1 *wirksamer* als Γ_2 , wenn für die folgenden Erwartungswerte gilt:

$$\langle (\Gamma_1 - \gamma)^2 \rangle \leq \langle (\Gamma_2 - \gamma)^2 \rangle , \quad (7.6)$$

d.h. wenn die Schätzung Γ_1 im Mittel näher am gesuchten Wert liegt. Man ist daher immer bestrebt, ein möglichst wirksames (wenn nicht gar das wirksamste) Auswerteverfahren zu finden.

¹Die Fourierkoeffizienten sind keinesfalls bei jeder Störung unabhängig. Betrachtet man jedoch das thermisch bedingte Rauschen in linearen Systemen, so ist dies selbst dann eine gute Annahme, wenn die Frequenzverteilung nicht mehr weiß ist. Sind die Fourierkoeffizienten des Eingangssignales eines linearen Filters unkorreliert, so gilt dies auch für die Fourierkoeffizienten des Ausgangssignales, da das Filter keine Mischfrequenzen erzeugt.

²Bei vielen Experimenten werden jedoch trotzdem nicht erwartungstreue Auswerteverfahren eingesetzt. Es läßt sich auch schwer bei einem Experiment nachweisen, ob das Auswerteverfahren wirklich erwartungstreu ist.

Eine Möglichkeit zur Gewinnung einer Schätzung ist die Maximum-Likelihood-Methode. Sie liefert von allen normalverteilten Schätzungen die größte Wirksamkeit. Bei unabhängig normalverteilten Meßfehlern³ führt diese Methode zum Least-Square-Fit [80].

Ausgangspunkt der Bestimmung der Schätzfunktion ist ein lineares Modell für das ungestörte Signal mit M anzupassenden Parametern $\gamma_1, \dots, \gamma_M$:

$$y(t) = \sum_{k=1}^M \gamma_k \cdot X_k(t) . \quad (7.7)$$

Dabei sind die $X_k(t)$ Funktionen der Zeit, die entweder aus einem zugrunde liegenden Modell stammen oder empirisch festgelegt wurden. Im Falle des Modells Gl.(7.1) sind dies die Funktionen $X_3(t) = t^2$, $X_2(t) = t$ und $X_1(t) = 1$. Die Funktionen X_k dürfen auch nichtlinear von t abhängen. Der Begriff lineares Modell bezieht sich nur auf die Abhängigkeit der Funktion y von den Parametern γ_k .

Um die M Parameter γ_j für die N Meßpunkte (t_i, y_i) optimal anzupassen, muß man das folgende Gleichungssystem aus M linearen Gleichungen ($k = 1 \dots M$) für die unbekannten γ_j lösen:

$$\sum_{j=1}^M \alpha_{kj} \gamma_j = \beta_k \quad \text{mit} \quad \alpha_{kj} = \sum_{i=1}^N \frac{X_j(t_i) X_k(t_i)}{\sigma_i^2} , \quad \beta_k = \sum_{i=1}^N \frac{y_i X_k(t_i)}{\sigma_i^2} . \quad (7.8)$$

Dabei ist σ_i die Standardabweichung der Meßfehler des i -ten Datenpunktes. Sind die Standardabweichungen bei allen Datenpunkten gleich groß, so haben sie keinen Einfluß auf die Schätzung der γ_k . Für unbekannte Standardabweichungen kann man daher $\sigma_i = 1$ setzen.

Wenn die t_i und die Funktionen X_i richtig gewählt sind, ist die aus den Koeffizienten α_{ik} bestehende Matrix $[\alpha]$ regulär. Das Gleichungssystem (7.8) kann somit durch Invertieren dieser Matrix gelöst werden. Ist $[C] = [\alpha]^{-1}$ die inverse Matrix von $[\alpha]$, so gilt für die Schätzwerte der Parameter:

$$\gamma_j = \sum_{k=1}^M C_{jk} \beta_k = \sum_{k=1}^M C_{jk} \sum_{i=1}^N \frac{y_i X_k(t_i)}{\sigma_i^2} . \quad (7.9)$$

Sind die Meßfehler der einzelnen Datenpunkte normalverteilt (Mittelwert 0), so sind auch die nach Gl.(7.9) ermittelten Schätzwerte für den Parameter γ_k normalverteilt und der Mittelwert entspricht dem tatsächlichen Wert von γ_k . Sind die Meßfehler sogar unabhängig normalverteilt, so ist Gl.(7.9) die wirksamste Schätzung und die Koeffizienten der Matrix C_{jk} liefern die Varianz ($j = k$) bzw. Kovarianz der Schätzwerte. Bei unserem Experiment mit abhängigen Rauschbeiträgen ist jedoch eine gesonderte Betrachtung zur Bestimmung der Standardabweichung der Schätzwerte notwendig.

³Die Meßfehler bei unserem Problem sind nicht unabhängig, da man Samplingraten anstrebt, die deutlich oberhalb der oberen Grenzfrequenz des Rauschens liegen. Für die Erwartungstreue der im folgenden erstellten Schätzfunktion reicht es jedoch bereits, wenn das Rauschen normalverteilt ist. Man erhält zwar eventuell nicht die wirksamste Schätzfunktion, aber die Wirksamkeit dürfte für eine Vielzahl von Rauschspektren in der Nähe des Optimums liegen.

7.1.3 Quadratischer Fit

Zur Beschreibung der Bewegungsgleichung (7.1) werden $M = 3$ Parameter und 3 Basisfunktionen

$$X_3(t) = t^2, \quad X_2(t) = t, \quad X_1(t) = 1 \quad (7.10)$$

benötigt. Es werden äquidistante Meßpunkte mit dem Abstand Δt verwendet:

$$t_i = (i - 1)\Delta t. \quad (7.11)$$

Setzt man $\sigma_i = 1$, so ergibt sich entsprechend Gl. (7.8):

$$\alpha_{jk} = \sum_{n=1}^N t_n^{j+k-2} = \Delta t^{j+k-2} \sum_{n=0}^{N-1} n^{j+k-2} \quad \text{für } j+k > 2 \quad \text{und} \quad \alpha_{11} = N, \quad (7.12)$$

$$\beta_1 = \sum_{i=1}^N y_i, \quad \beta_2 = \sum_{i=1}^N y_i \Delta t (i - 1), \quad \beta_3 = \sum_{i=1}^N y_i \Delta t^2 (i - 1)^2. \quad (7.13)$$

Die Beziehungen für die Summe der Potenzen von natürlichen Zahlen kann man mathematischen Nachschlagewerken entnehmen [68], z.B.:

$$\sum_{n=0}^{N-1} n = \frac{(N-1)N}{2}, \quad \sum_{n=0}^{N-1} n^2 = \frac{(N-1)N(2N-1)}{6}, \quad \dots \quad (7.14)$$

Setzt man dies in das Gleichungssystem (7.8) ein und löst es nach $\gamma_3 \Delta t^2$ auf, so erhält man:

$$\begin{aligned} \gamma_3 \Delta t^2 &= \frac{180}{(N-2)(N-1)N(N+1)(N+2)} \cdot \sum_{i=1}^N y_i (i-1)^2 \\ &\quad - \frac{180}{(N-2)N(N+1)(N+2)} \cdot \sum_{i=1}^N y_i (i-1) + \frac{30}{N(N+1)(N+2)} \cdot \sum_{i=1}^N y_i. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Wie zu erwarten war, gibt es nur für $N \geq 3$ eine Lösung. Für den einfachsten Fall $N = 3$ erhält die Gl. (7.15) die Form:

$$\gamma_3 \Delta t^2 = \frac{1}{2}(y_1 - 2y_2 + y_3). \quad (7.16)$$

Für $N = 4$ bzw. $N = 5$ ergibt sich:

$$\gamma_3 \Delta t^2 = \frac{1}{4}(y_1 - y_2 - y_3 + y_4) \quad \text{bzw.} \quad \gamma_3 \Delta t^2 = \frac{1}{14}(2y_1 - y_2 - 2y_3 - y_4 + 2y_5). \quad (7.17)$$

Für $N = 3$ ist Gl.(7.16) die einzige erwartungstreue Schätzfunktion für die Bestimmung des Parameters. Für $N > 3$ gibt es noch eine Vielzahl weitere erwartungstreuer Schätzfunktion. Man kann zum Beispiel aus jeweils 3 aufeinanderfolgenden Datenpunkten nach Gl.(7.16) einen Schätzwert bilden, und aus den so ermittelten Zwischenergebnissen einen gewichteten Mittelwert errechnen. Zum Beispiel ist für $N = 4$ die folgende Schätzfunktion ebenfalls erwartungstreu:

$$\gamma_3 \Delta t^2 = \frac{c_1(y_1 - 2y_2 + y_3) + c_2(y_2 - 2y_3 + y_4)}{2(c_1 + c_2)}, \quad (7.18)$$

wobei c_1 und c_2 ($c_1 + c_2 \neq 0$) beliebig gewählt werden können.

Die verschiedenen erwartungstreuen Schätzfunktionen unterscheiden sich jedoch in ihrer Wirksamkeit bei einem konkreten Rauschspektrum. Ist bei einem bestimmten Rauschspektrum die eine Schätzfunktion wirksamer als die andere, so kann es bei einem anderen Rauschspektrum genau umgekehrt sein. Die Gl. (7.15) liefert dabei die wirksamste Schätzung für ein breitbandiges weißes Rauschen.

7.1.4 Ermittlung der Standardabweichung

Da die Schätzfunktion Gl. (7.15) linear von den Datenpunkten abhängt und angenommen wird, daß das Rauschen unabhängig von der Bewegung der Körper ist, ist auch die Standardabweichung der Schätzwerte unabhängig von der Bewegung des Körpers. Man kann also ein fiktives Experiment annehmen, bei dem sich der Körper nicht bewegt. In diesem Fall bestehen die Datenpunkte nur aus den Rauschbeiträgen. Erzeugt man eine Vielzahl von Datensätzen von Rauschspannungen und berechnet für jeden dieser Datensätze mit Hilfe von Gl. (7.15) einen Schätzwert, so erhält man eine Normalverteilung der Schätzwerte um den Wert 0. Die dabei ermittelte Standardabweichung gilt dann auch für reale Experimente mit unbekannter Beschleunigung.

Um den Einfluß des Rauschens, also eines Gemisches aus vielen harmonischen Schwingungen, zu ermitteln, muß zuerst untersucht werden, welche Schätzwerte Gl. (7.15) für einzelne Sinus- und Cosinusschwingungen liefert.

Dazu setzt man die Datenpunkte $y_k = \cos(\omega t_k) = \cos[(k-1)\omega\Delta t]$ in Gl. (7.15) ein. Für die Summen der Sinus- und Cosinusfunktionen gilt dabei:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \sin(k\omega t) = \frac{\cos(\frac{\omega}{2}t) - \cos(\frac{2N-1}{2}\omega t)}{2 \sin(\frac{\omega}{2}t)}, \quad \sum_{k=0}^{N-1} \cos(k\omega t) = \frac{\sin(\frac{\omega}{2}t) + \sin(\frac{2N-1}{2}\omega t)}{2 \sin(\frac{\omega}{2}t)}. \quad (7.19)$$

Die Beziehungen für $\sum k \sin k\omega t$, $\sum k \cos k\omega t$, $\sum k^2 \sin k\omega t$ und $\sum k^2 \cos k\omega t$ können durch Ableitung aus den Gln. (7.19) gewonnen werden. So gilt z.B.:

$$\sum_{k=0}^{N-1} [k \cos(k\omega t)] = \frac{1}{t} \frac{d}{d\omega} \left[\sum_{k=0}^{N-1} \sin(k\omega t) \right] = \frac{1}{2} \left[N \frac{\sin(\frac{2N-1}{2}\omega t)}{\sin(\frac{\omega}{2}t)} - \left(\frac{\sin(\frac{N}{2}\omega t)}{\sin(\frac{\omega}{2}t)} \right)^2 \right]. \quad (7.20)$$

Nach einer Reihe umfangreicher Umformungen erhält man:

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\omega t, N) &= \frac{15}{N(N+1)(N+2)} + \frac{45}{(N-2)N(N+1)(N+2)} \cdot \frac{1}{\sin^2(\frac{\omega}{2}t)} \\ &+ \frac{15}{(N-2)(N-1)N} \cdot \frac{\sin[(N-\frac{1}{2})\omega t]}{\sin(\frac{\omega}{2}t)} + \frac{45}{(N-2)(N-1)(N+1)(N+2)} \frac{\cos(N\omega t)}{\sin^2(\frac{\omega}{2}t)} \\ &- \frac{45}{(N-2)(N-1)N(N+1)(N+2)} \cdot \frac{\sin[(N-\frac{1}{2})\omega t]}{\sin^3(\frac{\omega}{2}t)}. \end{aligned} \quad (7.21)$$

Dabei gibt $\tilde{A}(\omega\Delta t, N)$ an, welchen Schätzwert man erhält, wenn man N Datenpunkte einer Cosinusschwingung mit der Amplitude 1 und der Frequenz ω mit Hilfe von Gl.(7.15) auswertet. Dabei ist Δt der Abstand der Datenpunkte.

In analoger Weise erhält man für die Datenpunkte $y_k = \sin[(k-1)\omega\Delta t]$ einer Sinusschwingung eine Funktion $\tilde{B}(\omega t, N)$:

$$\begin{aligned}\tilde{B}(\omega t, N) = & -\frac{15}{(N-2)(N-1)N} \cdot \frac{\cos[(N-\frac{1}{2})\omega t]}{\sin(\frac{\omega}{2}t)} + \frac{15}{N(N+1)(N+2)} \cdot \frac{\cos(\frac{\omega}{2}t)}{\sin(\frac{\omega}{2}t)} \\ & - \frac{45}{(N-2)(N-1)N(N+1)(N+2)} \cdot \frac{\cos(\frac{\omega}{2}t)}{\sin^3(\frac{\omega}{2}t)} \\ & + \frac{45}{(N-2)(N-1)N(N+1)(N+2)} \cdot \frac{\cos[(N-\frac{1}{2})\omega t]}{\sin^3(\frac{\omega}{2}t)} \\ & + \frac{45}{(N-2)(N-1)(N+1)(N+2)} \cdot \frac{\sin(N\omega t)}{\sin^2(\frac{\omega}{2}t)}.\end{aligned}\quad (7.22)$$

Das Rauschen setzt sich entsprechend des Modells (7.4) aus einer Summe von Sinus- und Cosinusschwingungen zusammen. Wegen der Linearität der Schätzfunktion ist der Schätzwert für die Summe gleich der Summe der Schätzwerte für die einzelnen Summanden. Weiterhin gilt, daß die Summe von unabhängig normalverteilten Zufallszahlen wieder normalverteilt ist. Die Varianz (das Quadrat der Standardabweichung) dieser Summe entspricht dabei der Summe der Varianzen der einzelnen Summanden. Da die Fourierkoeffizienten a_k und b_k als unabhängig angenommen werden, gilt für die Standardabweichung der Schätzwerte des Rauschens:

$$\sigma_{noise}^2(N, \Delta t) = \sum_{k=1}^N [\sigma_k^2 \cdot (\tilde{A}(k\Delta\omega\Delta t, N))^2 + \sigma_k^2 \cdot (\tilde{B}(k\Delta\omega\Delta t, N))^2]. \quad (7.23)$$

Verringert man den Abstand der Frequenzintervalle $\Delta\omega$, so geht die Summe (7.23) in das Integral:

$$\sigma_{noise}^2(N, \Delta t) = \int_0^{\omega_{max}} (\tilde{A}^2(\omega\Delta t, N) + \tilde{B}^2(\omega\Delta t, N))\sigma^2(\omega)d\omega = \int_0^{\omega_{max}} F_N(\omega\Delta t)\sigma^2(\omega)d\omega \quad (7.24)$$

über, mit der Wichtungsfunktion $F_N(\omega t) = \tilde{A}^2(\omega t, N) + \tilde{B}^2(\omega t, N)$:

$$\begin{aligned}F_N(\omega t) = & \left[\frac{15}{(N-2)(N-1)N(N+1)(N+2)} \right]^2 \cdot \left[\right. \\ & 2(N-2)(N-1)(N+1)(N+2) \frac{2-2\cos(N\omega t)}{\sin^2(\frac{\omega}{2}t)} + 6(N-2)(N-1)N \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})\omega t]}{\sin^3(\frac{\omega}{2}t)} \\ & + 6N(N+1)(N+2) \cdot \frac{\sin[(N-\frac{1}{2})\omega t]}{\sin^3(\frac{\omega}{2}t)} + 6 \cdot \frac{N^2-4}{\sin^4(\frac{\omega}{2}t)} + (30N^2+24) \cdot \frac{\cos(N\omega t)}{\sin^4(\frac{\omega}{2}t)} \\ & \left. - 18N \cdot \frac{\sin[(N-\frac{1}{2})\omega t] + \sin[(N+\frac{1}{2})\omega t]}{\sin^5(\frac{\omega}{2}t)} + 18 \cdot \frac{1-\cos(N\omega t)}{\sin^6(\frac{\omega}{2}t)} \right].\end{aligned}\quad (7.25)$$

Die Funktion $F_N(\omega\Delta t)$ gibt an, wie sich die Rauschbeiträge mit der Frequenz ω auf den Schätzwert von $\gamma_3\Delta t^2$ auswirken, wenn der Schätzwert mit Hilfe von N Meßpunkten mit dem Abstand Δt berechnet wird. Dabei ist $F_N(\omega\Delta t) \geq 0$. Frequenzen, für die $F_N(\omega\Delta t) = 0$ ist, werden bei der Berechnung des Schätzwertes komplett unterdrückt. Zum Verständnis sei an dieser Stelle noch angemerkt, daß F_N auch an Stellen definiert sein soll, an denen $\sin\frac{\omega}{2}t = 0$ ist, da die Funktion dort gegen einen konstanten Wert strebt. Da sich \tilde{A} und \tilde{B} aus Summen

von Sinus - und Cosinusfunktionen des Argumentes $\omega\Delta t$ bzw. deren ganzzahligen Vielfachen zusammensetzen, besitzt F_N eine Periode von ω_0 mit $\omega_0\Delta t = 2\pi$, d.h. $F(\omega\Delta t + 2\pi) = F(\omega\Delta t)$. Für $\omega \rightarrow 0$ geht auch F_N gegen 0. Dies bedeutet, daß sehr niedrige Frequenzen oder ein Offsetfehler keinen Einfluß auf die Schätzung der Beschleunigung haben.

Bei unserem Experiment steht man vor der Situation, daß man eine vorgegebene Meßzeit t_m hat, jedoch die Anzahl der Meßpunkte über einen großen Bereich selbst wählen kann. Daher soll im folgenden die Funktion $F_N(\omega\Delta t)$ für große N untersucht werden. Für den Abstand der Meßpunkte gilt dabei $\Delta t = t_m/(N - 1)$.

Die Funktion F_N besitzt für $N \gg 1$ ein großes Hauptmaximum bei $\omega_1 \approx 6,7 t_m$. Die darauffolgenden Nebenmaxima sind deutlich kleiner. Da die Funktion periodisch ist und außerdem gilt $F(\omega t) = F(-\omega t)$, folgen bei $\omega_0 \pm \omega_1$ zwei weitere Hauptmaxima. Je größer man N wählt, desto weiter wandern die Maxima bei ω_1 und $\omega_0 - \omega_1$ auseinander. Für die Standardabweichung der Schätzung spielen nur die Frequenzen $\omega < \omega_{max}$ eine Rolle. Wählt man die Samplingrate hinreichend groß, so ist die Standardabweichung nur durch das erste Hauptmaximum und die ersten benachbarten Nebenmaxima bestimmt. Die höheren Frequenzen tragen dagegen kaum zur Größe der Standardabweichung bei, da entweder $F_N(\omega\Delta t)$ oder aber $\sigma(\omega)$ nahezu 0 sind.

Für $\omega\Delta t \ll 1$ und große N kann man die Funktion $F_N(\omega\Delta t)$ vereinfachen. Dazu setzt man in Gl.(7.25)

$$\sin \frac{\omega}{2}t \approx \frac{\omega}{2}t . \quad (7.26)$$

Daraus folgt $F_N(\omega\Delta t)\Delta t^{-4} \approx G(\omega) + O(N^{-1})$ mit:

$$\begin{aligned} G(\omega) = & \frac{15^2}{t_m^4} \cdot \left[8 \frac{1 - \cos(\omega t_m)}{\omega^2 t_m^2} + 96 \frac{\sin(\omega t_m)}{\omega^3 t_m^3} + \frac{96}{\omega^4 t_m^4} \right. \\ & \left. + 480 \frac{\cos(\omega t_m)}{\omega^4 t_m^4} - 1152 \frac{\sin(\omega t_m)}{\omega^5 t_m^5} + 1152 \frac{1 - \cos(\omega t_m)}{\omega^6 t_m^6} \right] , \end{aligned} \quad (7.27)$$

wobei $O(N^{-1})$ eine Funktion ist, die für große N gegen 0 geht.

Da sich σ_{noise} auf die Schätzung von $\gamma_3\Delta t^2$ bezieht, gilt für die Standardabweichung der Schätzung des Parameters γ_3 : $\sigma_{\gamma_3} = \sigma_{noise}/\Delta t^2$. Für $N \gg 1$ und $\omega_{max} \ll N/t_m$ gilt damit:

$$\sigma_{\gamma_3}^2 \approx \int_0^{\omega_{max}} G(\omega) \sigma^2(\omega) d\omega . \quad (7.28)$$

Die Funktion $G(\omega)$ hängt nur von der Meßzeit t_m , jedoch nicht von N ab. Dies bedeutet, daß das Auflösungsvermögen für große N gegen einen Grenzwert konvergiert. Eine weitere Erhöhung der Samplingrate bringt dann keine weitere Verbesserung des Auflösungsvermögens.

Für ein breitbandiges Rauschen ($\omega_{max}t_m \gg 1$) mit konstanter spektraler Leistungsdichte $\sigma(\omega) = \sigma_0$ unterhalb von ω_{max} kann man σ_{γ_3} analytisch berechnen. Berücksichtigt man, daß $G(\omega)$ für große ω schnell gegen 0 konvergiert, so folgt:

$$\sigma_{\gamma_3}^2 \approx \int_0^{\omega_{max}} G(\omega) \sigma_0^2 d\omega \approx \sigma_0^2 \int_0^\infty G(\omega) d\omega = 180\pi \sigma_0^2 t_m^{-5} . \quad (7.29)$$

Das erzielbare Auflösungsvermögen, konvergiert bei einem breitbandigen weißen Rauschen und hinreichend großer Abtastrate gegen diesen Wert.

Verwendet man eine andere erwartungstreue Schätzfunktion, so erhält man auch eine andere Funktion $G(\omega)$, die eventuell bei anderen Frequenzen Nullstellen besitzt. Weist das Frequenzspektrum auffallende Peaks bei bestimmten Frequenzen auf, so sollte man überprüfen, wie stark diese Rauschanteile zur Standardabweichung beitragen. Ursache solcher Peaks können zum Beispiel mechanische Eigenfrequenzen des Meßsystems sein, während Einstrahlungen der Netzfrequenz (50 Hz) bei den bisherigen Experimenten nicht beobachtet wurden. Haben die Störpeaks großen Einfluß auf die Standardabweichung, weil sie zum Beispiel mit einem ersten Maxima von G zusammenfallen, so sollte man eventuell eine andere Schätzfunktion verwenden. Diese sollte bei der Frequenz des Peaks ω_p eine Nullstelle haben. Eine solche Schätzfunktion läßt sich konstruieren, indem man das Modell (7.1) um zwei weitere freie Parameter γ_4 und γ_5 und einen Term $\gamma_4 \cdot \cos \omega_p t + \gamma_5 \cdot \sin \omega_p t$ ergänzt und eine neue Schätzfunktion nach dem Least-Square-Verfahren ermittelt. Dieser Aufwand lohnt sich jedoch nur, wenn es sich um wenige sehr starke Peaks im Rauschspektrum handelt. Das gezielte Unterdrücken einzelner Frequenzen hat nämlich den Nachteil, daß der Einfluß der anderen Frequenzkomponenten des Rauschens zunimmt.

7.1.5 Einfluß eines Tiefpasses

Da stets $G(\omega) \geq 0$ ist, führt eine Reduzierung der Bandbreite des Rauschens entsprechend Gl.(7.28) zu einer Reduzierung von σ_{γ_3} . Dies führt jedoch nicht notwendigerweise zur Erhöhung des Auflösungsvermögens. Eine wesentliche Verringerung von σ_{γ_3} läßt sich nämlich nur erzielen, wenn man mit der Grenzfrequenz in den Bereich des ersten Hauptmaximums bei $\omega \approx 6,7/t_m$ kommt. In diesem Fall wirkt sich der Tiefpaß jedoch auch deutlich auf das Signal aus. Damit werden sowohl Meßsignal als auch das Rauschen verringert. Außerdem müßte in diesem Fall das Modell für das Signal angepaßt werden. Legt man an einen einfachen Tiefpaß ein Signal an, das quadratisch von der Zeit abhängt, so hängt auch das Ausgangssignal bei eingeschwungenem Tiefpaß quadratisch von der Zeit ab. Dabei ist jedoch die zweite Ableitung geringer als beim Eingangssignal. Da man nicht auf das Einschwingen warten kann (verschenkte Meßzeit), müßte das Modell für das Signal Gl. (7.1) um einen Term der Form $\gamma_4 \cdot e^{-\lambda t}$ (λ Zeitkonstante des Tiefpasses) ergänzt werden. Untersucht man das Problem genauer, so erhält man eher eine Verschlechterung des erzielbaren Auflösungsvermögens durch den Tiefpaß.

Ein weiteres Argument gegen eine zu starke Filterung ist das folgende. Die Wirkung eines analogen Filters kann auch numerisch nachgebildet werden, vorausgesetzt, es werden hinreichend viele Datenpunkte mit der notwendigen Genauigkeit aufgezeichnet. Numerische Filter lassen sich jedoch besser an das gesuchte Signal und die Störung anpassen. Hat man für ein bestimmtes Rauschen das wirksamste Auswerteverfahren gefunden, so kann auch eine Vorverarbeitung der Daten (Filter) keine Verbesserung bringen.

Analoge Filter sind vor allem dann sinnvoll, wenn die Störungen größer als das Signal werden, also der Meßbereich des Wandlers durch die Störungen statt durch das Signal bestimmt wird. Außerdem müssen natürlich die hochfrequenten Störungen, denen der Wandler nicht mehr folgen kann, unterdrückt werden.

Die Auswahl des Tiefpasses wird daher im wesentlichen durch die maximale Samplingrate

der Datenerfassung vorgegeben. Um keine Auflösung zu verschenken, sollte die Grenzfrequenz des Tiefpasses deutlich geringer als die halbe Samplingrate sein. Außerdem sollten die auftretenden Rauschamplituden in einem vernünftigen Verhältnis zum Meßbereich des A-D-Wandlers und zur Bewegung des Körpers stehen. Um zu gewährleisten, daß der Einfluß des Tiefpasses auf das Signal vernachlässigbar ist, sollte man die Grenzfrequenz möglichst größer als $50/t_m$ wählen.

Die Anzahl der Meßpunkte sollte möglichst groß sein, sofern dies keine negativen Auswirkungen auf die Qualität der A-D-Wandlung hat⁴. Eine hohe Datenrate erlaubt es, diskrete Störungen im Signal besser aufzuspüren und gegebenenfalls zu unterdrücken.

7.2 Abschätzung des Auflösungsvermögens

In diesem Abschnitt soll die Auflösung unseres Experiments bestimmt werden. Dazu müssen die experimentell ermittelten Werte in Bezug zu den in Gl.(7.29) enthaltenen Größen gebracht werden. Für den Detektor ist statt der Standardabweichung der Fourierkoeffizienten das rauschbegrenzte Auflösungsvermögen der Position x bekannt, das sich aus der Rauschleistung pro Frequenzintervall f zusammensetzt:

$$(\delta x)^2 = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t x^2 dt . \quad (7.30)$$

Für unser Modell mit $\sigma(\omega) = \sigma_0$ und einer Bandbreite von $\omega_{max} = 2\pi f$ folgt:

$$(\delta x)^2 = \frac{1}{f} \cdot \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^{\omega_{max}} \sigma_0^2 [\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t] d\omega dt = \frac{\omega_{max} t}{ft} \sigma_0^2 = 2\pi \sigma_0^2 . \quad (7.31)$$

Für die Standardabweichung der Beschleunigung σ_a gilt:

$$\sigma_a = 2\sigma_{\gamma 3} = \sqrt{4 \cdot 180\pi \sigma_0^2 t_m^{-5}} = \sqrt{360} t_m^{-5/2} \delta x , \quad (7.32)$$

wobei δx die rauschbegrenzte Ortsauflösung des Detektors und t_m die Meßzeit ist.

Liefert der Detektor bereits die Differenzbeschleunigung der beiden Körper, so gilt für die Auflösung des Eötvös-Koeffizienten σ_η :

$$\sigma_\eta = \sigma_a / g_0 , \quad (7.33)$$

wobei g_0 die Fallbeschleunigung ist.

Setzt man das im Labor erzielte Positionsauflösungsvermögen von $\delta x = 4 \cdot 10^{-14} \text{ m}/\sqrt{\text{Hz}}$ ein [60] und nimmt man an, daß nach der Freigabe des Freeflyers und der Positionierung der Testkörper noch $t_m = 2,5 \text{ s}$ reine Meßzeit verbleiben (Gesamtfallzeit 4,7 s), so erhält man:

$$\sigma_\eta = 8 \cdot 10^{-15} . \quad (7.34)$$

⁴Bei Sigma-Delta Wandlern wird zwar angegeben, daß deren Auflösungsvermögen mit wachsender Datenrate abnimmt. Die meisten dieser Wandler tasten jedoch das Signal unabhängig von der ausgegebenen Datenrate intern mit der gleichen Frequenz ab. Die höheren Auflösungsraten bei niedrigen Datenraten werden dadurch gewonnen, daß über eine größere Zahl interner Daten gemittelt wird. Die gleichen (wenn nicht gar bessere) Resultate kann man erzielen, wenn man sich die Daten mit maximaler Datenrate ausgeben läßt und die Daten numerisch nachbehandelt.

Dieser Wert ließe sich jedoch noch weiter steigern, da das bei den Laborexperimenten verwendete SQUID ein erhöhtes Rauschen zeigte ($\delta\Phi = 6 \cdot 10^{-6} \Phi_0 / \sqrt{\text{Hz}}$ im Vergleich zu $2 \cdot 10^{-6} \Phi_0 / \sqrt{\text{Hz}}$ bei speziell selektierten Exemplaren). Außerdem wurde der eingespeiste Strom von 200 mA absichtlich nicht weiter gesteigert, da sich der Körper im Laboraufbau nicht mehr mit der erforderlichen Präzision verschieben ließ (seismische Erschütterungen u.ä.) [81].

Werden die Positionen der beiden Testkörpern jeweils mit eigenen Detektoren gemessen, so gilt:

$$\sigma_\eta = \sqrt{\sigma_{a1}^2 + \sigma_{a2}^2} / g_0, \quad (7.35)$$

wobei σ_{a1} und σ_{a2} die Auflösung der Detektoren der einzelnen Körper sind.

7.3 Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Da die Optimierung des Meßsystems noch nicht soweit fortgeschritten ist, um tatsächlich das SÄP überprüfen zu können, wurde in diesem Kapitel versucht, das erzielbare Auflösungsvermögen theoretisch abzuschätzen.

Auf Grund einfacher Überlegungen war dabei zu erwarten, daß das Auflösungsvermögen für η proportional zu $t_m^{-5/2}$ ist. Die durch die Verletzung des SÄP hervorgerufene Verschiebung der Testkörper würde nämlich mit t_m^2 anwachsen. Außerdem verbessert sich die Meßgenauigkeit bei der Bestimmung der Verschiebung mit $1/\sqrt{t_m}$.

Um jedoch die vollständige Beziehung zwischen dem Rauschen des Wandlers, der Meßzeit, der Samplingrate und des statistischen Fehlers von η zu ermitteln, wurde ein Datenauswerteverfahren erstellt. Dieses liefert für eine beliebige Anzahl von äquidistanten Meßpunkten eine Schätzung für η und ist optimal an den Fall eines breitbandigen Rauschens angepaßt. Auf der Basis dieses Auswerteverfahrens wurde untersucht, wie sich das Rauschen in verschiedenen Frequenzbereichen bei unterschiedlichen Meßzeiten und Samplingraten auf die Bestimmung von η auswirkt. Der statistische Fehler σ_η nimmt wie erwartet mit wachsender Samplingrate ab und strebt gegen einen Grenzwert. Es wurde daher eine Formel zur Berechnung dieses Grenzwertes aus dem Rauschspektrum erstellt. Für den Spezialfall eines breitbandigen Rauschens mit konstanter spektraler Dichte (bis zu einer Frequenz f_{max}) wurde dann eine Formel zur Berechnung von σ_η hergeleitet. Dabei hängt σ_η nur vom rauschbegrenzten Positionsauflösungsvermögen und der Meßzeit ab. Auf der Basis des in Laborversuchen ermittelten Positionsauflösungsvermögens und einer Meßzeit von 2,5 s wurde ein statistischer Fehler $\sigma_\eta = 8 \cdot 10^{-15}$ abgeschätzt.

Es konnte weiterhin gezeigt werden, daß das Signal durch einen Tiefpaß begrenzt sein sollte. Die Bandbreite dieses Tiefpasses sollte deutlich kleiner als die Abtastfrequenz sein. Andererseits sollte die Grenzfrequenz des Tiefpasses nicht zu klein gewählt werden, da er sonst den Signalverlauf verändert. Insbesondere Störungen des Experimentablaufes sind dann nicht mehr eindeutig identifizierbar. In unserem Meßsystem wird daher eine Abtastrate von 5 kHz verwendet. Bei späteren Experimenten sollte die Grenzfrequenz der Filter unterhalb von 1 kHz liegen. Bisher wurde jedoch eine größere Grenzfrequenz gewählt, um den Signalverlauf möglichst gut aufzuzeichnen. Der bei einigen Experimenten eingesetzte 24-bit Sigma-Delta-

Wandler verwendete ein internes numerisches Filter, daß bereits optimal an die ausgegebene Datenrate angepaßt war. Bei Einsatz dieses Wandlers war die maximale Datenraten durch den Speicher des angeschlossenen Transputers auf 1 kHz beschränkt.

In diesem Kapitel wurde nur die statistische Komponente des Fehlers berechnet, die vom Rauschen des Detektors verursacht wird. Dieser Beitrag läßt sich weiter verringern, wenn man eine Vielzahl weiterer Versuche durchführt und über die Ergebnisse mittelt. Störungen, die die Bewegung der Körper selbst betreffen oder systematische Fehler müssen gesondert erfaßt werden. Die bei den einzelnen Versuchen ermittelten Werte für η werden daher deutlich stärker streuen, als in diesem Kapitel ermittelt wurde.

Außerdem muß eventuell das Modell für die Daten weiter angepaßt werden. Will man z.B. Nichtlinearitäten des Detektors berücksichtigen, so muß man neben der Beschleunigung auch die Geschwindigkeit aus den Meßdaten ermitteln und den Beschleunigungswert entsprechend korrigieren. Der Korrekturfaktor muß seinerseits aus einer Reihe von Messungen bestimmt werden. Ähnliches gilt auch für lineare Rückwirkungen (z.B. Gravitationsgradient), oder die Wirkung anderer Meßgrößen, deren Einfluß erst im Laufe der Experimente erkennbar wird.

Ergänzende Betrachtungen

8.1 Externe Flüsse

Ein großes Problem für den Einsatz des Detektors in unserem Experiment stellen externe Flüsse dar. Zur Unterdrückung externer magnetischer Störungen ist das System zwar mehrfach supra-leitend geschirmt, dies hat jedoch auf der anderen Seite den Nachteil, daß beim Einkühlen in der Regel Fluß im System eingefroren wird. Wenn im folgenden von externem Fluß gesprochen wird, so beziehen sich die Aussagen auch auf diesen Fluß. Neben den externen Flüssen können auch im Testkörper selbst Felder eingefroren werden. Dies hat ähnliche Auswirkungen wie ein externes Feld.

Die externen Felder wirken auf unterschiedliche Weise störend auf unser Experiment. Zum einen führen zeitliche Änderungen des externen Flusses zu einem vorgetäuschten Bewegungssignal. Dies verfälscht nicht nur den Offsetwert der Position, sondern kann im Falle einer niederfrequenten Störung auch Auswirkung auf den Schätzwert der Beschleunigung haben.

Aber auch ein konstantes externes Feld wirkt sich störend auf die Messung aus. Ein solches Feld führt zu einer Magnetisierung des Testkörpers. Damit bewirkt eine Bewegung des Testkörpers auch ein Signal $I_e(x)$ des Detektors, wenn kein zusätzlicher Strom in das Meßsystem eingespeist wurde ($I_0 = 0$). Wird ein zusätzlicher Strom I_0 eingespeist, so addieren sich das Signal, das auf das externe Feld zurückzuführen ist, mit dem Signal, das durch das Einspeisen des Stromes verursacht wird. Für kleine eingespeiste Ströme wird das Signal ausschließlich durch den externen Fluß bestimmt. Dagegen entspricht der Signalverlauf bei großen eingespeisten Strömen im wesentlichen den aus Kap. 3 erwarteten Verläufen. Bei einem eingespeisten Strom von ca. 10 mA hoben sich die Wirkungen des externen Flusses und des eingespeisten Stromes (bei $x = 0$) auf [82]. Ein Problem besteht darin, daß das vom externen Fluß verursachte Signal und das durch das Einfrieren verursachten Signal vollständig unterschiedliche Verläufe besitzen. Daher ändert sich die Signalform in Abhängigkeit vom eingespeisten Strom. Dabei kann es vorkommen, daß das Detektorsignal nicht mehr monoton mit der Position ansteigt, sondern auch Extremstellen im Signalverlauf besitzt. Für diese Positionen ist der Detektor unempfindlich gegen Bewegungen des Körpers. Bei Anwesenheit eines externen Flusses ist es sehr schwierig, gezielt kleine Empfindlichkeiten des Sensors einzustellen. Während in einem Teil des Arbeitsbereiches die Empfindlichkeit verschwindet, heben sich in einem anderen Teil das vom externen Fluß verursachte Signal und das vom eingespeisten Strom verursachte Signal nicht mehr vollständig auf. Dies konnte in Laborexperimenten bestätigt werden [9]. In diesen Experimenten wurde die Beziehung zwischen Detektorsignal und Position für verschiedene eingespeiste Ströme untersucht. Dabei ergaben sich völlig unterschiedliche Kurvenformen. Erst nachdem $I_e(x)$ (entspricht der Meßkurve für $I_0 = 0$) von den einzelnen Meßkurven abgezogen wurde, ergaben sich die Verläufe, die man entsprechend Kapitel 3.3 erwarten würde. Die Signalverläufe für unterschiedliche eingespeiste Ströme I_0 unterschieden sich nicht mehr in der Form,

sondern waren proportional zu I_0 . Je nach eingespeistem Strom wuchs oder fiel das Signal über den gesamten Meßbereich monoton mit der Position.

Auch auf die Empfindlichkeit gegenüber seitlichen Bewegungen kann sich das externe Feld negativ auswirken. Während ohne externen Fluß für eine bestimmte Detektorgeometrie die Empfindlichkeit für radiale und axiale Bewegungen in einem festen Verhältnis zueinander stehen, ändert sich dies bei Anwesenheit eines externen Flusses. Insbesondere bei kleinen Empfindlichkeiten können sich ungünstige Verhältnisse ergeben. Ohne externen Strom verschwindet die axiale und die radiale Empfindlichkeit, beim selben eingespeisten Strom, nämlich bei $I_0 = 0$. Bei Anwesenheit eines externen Stromes verschwindet die axiale Empfindlichkeit bei I_{01} und die radiale Empfindlichkeit bei I_{02} , wobei sich die beiden Ströme in der Regel unterscheiden. Für $I_0 \rightarrow I_{01}$ geht die axiale Empfindlichkeit gegen 0, während die radiale Empfindlichkeit einen von 0 verschiedenen Wert anstrebt. Das Verhältnis zwischen axialer und radialer Empfindlichkeit verschlechtert sich also für kleine axiale Empfindlichkeiten dramatisch.

Besonders problematisch ist, daß sich der eingefrorenen Fluß von einem Einkühlen zum anderen ändert. Dabei kann sich nicht nur einfach die Amplitude ändern, sondern der Feldstärkeverlauf kann sich auch in der Form völlig unterscheiden. Dies wirkt sich ungünstig auf die Reproduzierbarkeit aus.

Bei den bisherigen Experimenten wurde daher ein relativ hoher eingefrorener Strom angestrebt, so daß der Einfluß des eingefrorenen Flusses nur noch eine untergeordnete Rolle für den Signalverlauf spielt. Für eine Präzisionsmessung ist dies jedoch keine befriedigende Lösung.

Neben der Positionsmessung beeinflusst der eingefrorenen Fluß auch direkt die Bewegung der Testkörper. Ist in den Testkörper ein Fluß eingefroren, so ist die Kraft, die der Körper im Feld einer Spule erfährt, nicht mehr proportional zum Quadrat des Stromes in der Spule, sondern besitzt auch einen Term, der linear vom fließenden Strom abhängt und proportional zum eingefrorenen magnetischen Moment ist. Dies führt dazu, daß die Rückwirkung des Detektors auf den Körper nicht mehr verschwindet, wenn sich dieser in der Mitte zwischen den Detektorspulen befindet.

Weiterhin kann es auch zu einer Rückwirkung des magnetisierten Körpers mit den supraleitenden Teilen des Meßsystems kommen. Umgekehrt kann der supraleitende Körper durch eingefrorene Felder im übrigen Meßsystem abgestoßen werden. Meist führt dies dazu, daß der Körper beim Experiment versucht, in die Position zurückzukehren, in der er sich beim Einkühlen des Meßsystems befand, also in Richtung der unteren Tragespule.

Man muß also beim Einkühlen des Meßsystems das Einfrieren des Flusses unbedingt vermeiden. So könnte man z.B. das Meßsystem in einer geschirmten Kammer einkühlen, die am Fallturm jedoch nicht zur Verfügung steht, oder man kann versuchen, das Erdmagnetfeld durch externe Spulen während des Einkühlens zu kompensieren. Aufgrund der Abmessungen der gesamten Meßanordnung bereitet die Abschirmung der Felder jedoch erhebliche praktische Probleme.

8.2 Bestimmung der Absolutposition

Die Gleichungen in Kap. 3 legen nahe, daß der Detektor ein Signal liefert, das eindeutig von der Auslenkung aus der Mittellage x abhängt und das verschwindet, wenn sich der Körper in der Mitte zwischen den Spulen befindet. Dies gilt jedoch nur, wenn tatsächlich eine symmetrische Flußverteilung eingefroren wurde und die Detektorspulen übereinstimmen. In der Praxis kann man jedoch für jede Position des Bewegungsbereiches erreichen, daß kein Strom durch die SQUID-Spule fließt. Nachdem man eine Flußverteilung in der Anordnung eingefroren hat, muß man den Körper nur an den gewünschten Ort x_0 verschieben, und den Schalter S_2 öffnen (siehe Abb. 3.2) und wieder schließen. Durch das Öffnen des Schalters ist $I_i(x_0) = 0$. Nach dem Schließen des Schalters ergibt sich also eine Flußverteilung, die für $x = x_0$ jeweils den Strom $I_i = 0$ liefert. Der Punkt an dem $I_i = 0$ ist, wird also nicht durch die Geometrie des Detektors bestimmt, sondern durch den Punkt x_0 , an dem S_2 zum letzten Mal geschlossen wurde. Der Detektor mißt also Relativverschiebungen gegenüber x_0 . Will man also die Absolutposition des Körpers wissen, muß man die absolute Lage von x_0 genau kennen.

Bei unseren vorbereitenden Experimenten wurde der Fluß eingespeist, als sich der Körper auf der unteren Levitationsspule befand. Dies ist aus mehreren Gründen problematisch für eine Präzisionsmessung. Einerseits erhält man damit eine asymmetrische Flußverteilung und somit eine Rückwirkung des Detektors, wenn sich der Körper in der Mittelposition befindet. Außerdem ist der Strom in der SQUID-Eingangsspule relativ groß, wenn sich der Körper in der Mitte befindet. Andererseits ist die Referenzlage nicht exakt reproduzierbar und kann sich von Versuch zu Versuch um einige μm unterscheiden. Die bessere Lösung wäre ein weiterer Sensor, z.B. ein optisches Interferometer, der die Absolutposition mit einer Genauigkeit von 100 nm bestimmt¹. Durch geeignete Maßnahmen läßt sich dann auch sicherstellen, daß die Referenzpunkte für den inneren und den äußeren Körper übereinstimmen und man die Schwerpunkte der Körper tatsächlich mit der erforderlichen Genauigkeit übereinander positionieren kann.

8.3 Symmetrie

Eine Vielzahl von Aussagen in dieser Arbeit beziehen sich auf ein symmetrisches Meßsystem. So verschwindet die abstoßende Kraft oder die Empfindlichkeit gegen seitliche Bewegungen nur, wenn die Detektorspulen tatsächlich gleiche Induktivitätsverläufe besitzen und die eingefrorenen Flüsse tatsächlich gleich sind.

Weiterhin müssen die Teilsysteme mit hoher Genauigkeit gegeneinander zentriert sein. Wenn sich die Körper in der Mitte zwischen ihren jeweiligen Detektorspulen befinden, so sollten auch die Schwerpunkte der beiden Körper zusammenfallen. Die Symmetrieebenen der Detektoren für inneren und äußeren Körper dürfen also nicht in vertikaler Richtung gegeneinander verschoben sein. Da die Schwerpunkte mit einer Genauigkeit von $1\mu m$ übereinstimmen sollen, wäre eine Übereinstimmung in ähnlicher Größenordnung wünschenswert. Auch in radialer Richtung

¹Der Sensor kann gleichzeitig bei der Positionierung der Testkörper nach der Freigabe eingesetzt werden. In diesem Fall wäre eine noch höhere Empfindlichkeit empfehlenswert.

sollten die Systeme coaxial angeordnet sein, wobei die Anforderung an diese Ausrichtung nicht ganz so hoch ist.

In realen Systemen unterscheiden sich jedoch der Nullpunkt der Positionierung², die Gleichgewichtslage der Rückwirkung durch den Detektor und der Punkt, an dem die Schwerpunkte der Körper tatsächlich übereinstimmen. Um die erforderliche Genauigkeit bei der Bestimmung von η zu erreichen, muß man daher versuchen, die Größe der Abweichungen zu ermitteln. So kann man zum Beispiel die Übereinstimmung der Schwerpunkte³ dadurch überprüfen, daß zusätzliche Störmassen (Größenordnung 10–20 Kilogramm) innerhalb des Freeflyers befestigt werden. Je nachdem ob und wie weit sich die Schwerpunkte der Körper unterscheiden, gibt es eine zusätzliche Beschleunigungsdifferenz der Testkörper als Funktion der zusätzlichen Störmasse.

Eine eventuell durch die Detektorspulen verursachte Kraft läßt sich bestimmen, indem man den Versuch mit unterschiedlichen eingespeisten Strömen durchführt und die gemessenen Beschleunigungsdifferenzen als Funktion des eingespeisten Stromes im Detektorkreis aufträgt. Man kann daraus den Fall extrapolieren in dem keine Rückwirkung durch die Detektorspulen auftritt.

Der Versuch, den Einfluß der oben genannten Größen aus mehreren Fallversuchen zu bestimmen, hat nur Sinn, wenn die Experimente eine gewisse Reproduzierbarkeit aufweisen. Wenn die Meßergebnisse für η wegen unterschiedlicher externer Flüsse zu stark schwanken oder sich die Absolutposition des Nullpunktes des Detektors von Versuch zu Versuch verschiebt, so läßt sich z.B. der Einfluß einer zusätzlichen Störmasse nicht mehr eindeutig bestimmen.

8.4 Auswirkung von Nichtlinearitäten

Wie im Kapitel 3.3 gezeigt wurde, ergibt sich für die meisten Induktivitätsverläufe ein nichtlinearer Zusammenhang zwischen der Position der Körper und dem Signal des Detektors. Selbst dann, wenn man sich um eine Optimierung des Induktivitätsverlaufes bemüht, bleibt ein gewisser Rest an Nichtlinearität. Da sich die Körper während des Experimentes Bewegungen im Bereich von $0,1 \mu\text{m}$ ausführen, aber Abweichungen von der gleichförmigen Bewegung mit einer Genauigkeit von 10^{-12}m bestimmt werden sollen, läßt sich die Nichtlinearität nicht vernachlässigen. Bewegt sich ein Körper mit konstanter Geschwindigkeit $x(t) = v_0 \cdot t + x_0$ (v_0 - Geschwindigkeit, x_0 - Anfangsposition) und mißt man die Position mit einem nichtlinearen Detektor mit der Kennlinie⁴ $U(x) = A + Bx + Cx^2$, so erhält man als Ausgangssignal $U(t) = A + Bx_0 + Cx_0^2 + (B + 2Cx_0)v_0t + Cv_0^2t^2$, also eine quadratische Funktion. Verwendet man das in Kapitel 7.1.3 dargestellte Auswerteverfahren, so erhielte man eine scheinbare Beschleunigung, die von der Geschwindigkeit des Körpers abhängt.

²Dies ist der Punkt bei dem der Sensor der Positionierung meldet, daß der Körper die richtige Position erreicht hat.

³Es soll dabei überprüft werden, wie weit sich die Schwerpunkte tatsächlich unterscheiden, wenn die Sensoren melden, daß die Schwerpunkte übereinstimmen.

⁴Ein besserer Ansatz für einen realen Detektor würde auch einen kubischen Term berücksichtigen, da der quadratische Term für symmetrische Detektoren und symmetrischen Fluß verschwindet. An dieser Stelle soll jedoch nur das Prinzip erläutert werden.

Um den Einfluß der Relativgeschwindigkeit auf die Bestimmung von η numerisch zu unterdrücken⁵, ist für verschiedene Relativgeschwindigkeiten der Eötvöskoeffizient zu bestimmen. Trägt man die Meßwerte als Funktion der Relativgeschwindigkeit auf, so kann man den Wert für eine Relativgeschwindigkeit von 0 interpolieren und außerdem versuchen, die Koeffizienten für die Nichtlinearität des Detektors zu bestimmen. Dies setzt natürlich eine gewisse Reproduzierbarkeit der restlichen Versuchsbedingungen (eingefrorene Felder, Restbeschleunigung der Kapsel) voraus.

Die beste Methode, den Einfluß der Nichtlinearität zu unterdrücken, ist eine Unterdrückung der Bewegung der Testkörper im Meßsystem. Vor der Messung lassen sich zwar die Körper mit Hilfe der Levitationsspulen am gewünschten Ort positionieren und abbremsen, während der Messung müssen die Levitationsspulen jedoch ausgeschaltet werden. Danach behalten die Körper zwar ihre relativ kleine Relativgeschwindigkeit zueinander bei, die Relativgeschwindigkeit zum Detektor ändert sich jedoch wegen der Restbeschleunigung der Freeflyers. Würde man die Relativbewegung des Detektors zu einem der beiden Körper unterdrücken, so würde auch die Relativbewegung zwischen Detektor und anderem Körper nahezu verschwinden. Es gibt zwei Möglichkeiten die Relativbewegung zwischen Detektor und Körper zu ändern, ohne den Testkörper selbst zu beschleunigen. Entweder man ändert die Beschleunigung des gesamten Freeflyers oder man verschiebt den Detektor gegenüber dem Schwerpunkt des Freeflyers. Die erste Version soll in ähnlicher Weise im STEP-Projekt angewendet werden. Dabei wird durch Gasdüsen die Beschleunigung des Satelliten geregelt. Dies wäre zwar prinzipiell auch beim Freeflyer möglich, allerdings ist das Verfahren sehr träge.

Die zweite Methode erscheint erfolgversprechender. Das Meßsystem ist zwar aus Gründen der Stabilität fest mit dem Kryostaten und damit mit dem Freeflyer verbunden. Verschiebt man jedoch innerhalb des Freeflyers eine Masse, so ändert sich aufgrund der Erhaltung des Schwerpunktes auch die Lage der restlichen Struktur gegenüber dem fallenden Schwerpunkt des Gesamtsystems. Bewegt man z.B. 10 kg um 2 cm innerhalb der Kapsel nach oben, so verschiebt sich der Rest des Freeflyers (Gewicht ca. 200 kg) gegenüber dem Schwerpunkt des Gesamtsystems um ca. 1 mm nach unten. Wenn der Freeflyer wie erhofft eine maximale Restbeschleunigung von $> 10^{-7} g_0$ liefert, so dürfte dies vollständig ausreichen, um den Einfluß der Restbeschleunigung auszugleichen, vorausgesetzt die Testkörper wurden zu Beginn hinreichend abgebremst und fallen frei.

Eine gezielte Verschiebung des Meßsystems bezüglich der Testkörper erlaubt außerdem eine genaue Bestimmung der Empfindlichkeiten der einzelnen Detektoren bzw. eine Überprüfung des Abgleichs bei einem differentiellen Detektor. Auch bei der Bestimmung der Rückwirkung des Detektors ist eine gezielte störungsarme Verschiebung der Testkörper gegenüber dem Meßsystem während des Abwurfes von Vorteil.

⁵In der Praxis dürfte es schwierig sein, die Nichtlinearität durch direkte Messung von $U(x)$ mit der erforderlichen Genauigkeit zu bestimmen, da man dazu eine präzise Verschiebung der Körper und ein zweites lineares Positionsmesssystem benötigt.

8.5 Meßgrenzen

In den Kapiteln 3 und 7 wurde ausführlich die Problematik des Rauschens des Sensors und dessen Auswirkung auf den statistischen Fehler bei der Bestimmung von η diskutiert. Dabei zeigte sich, daß sich die Auflösung durch Erhöhung des eingespeisten Stromes verbessern läßt. Außerdem wurde festgestellt, daß die bisher im Labor erzielten Resultate für das Auflösungsvermögen des Sensors ausreichen dürften, um η mit der gewünschten Genauigkeit zu bestimmen, sofern man die Probleme der systematischen Fehler lösen kann. Es ist daher gar nicht notwendig, den Detektor mit dem maximal möglichen Auflösungsvermögen zu betreiben⁶. In diesem Kapitel soll kurz diskutiert werden, welche Größen prinzipiell das Auflösungsvermögen begrenzen und wo die Auflösungsgrenzen liegen, wenn man bestimmte Probleme unterdrücken könnte.

Wie bereits erwähnt wurde, sind die systematischen Fehlern das Hauptproblem bei der Bestimmung von η . Unterscheidet sich die Lage des Schwerpunktes der Körper systematisch⁷ um $1\text{ }\mu\text{m}$, so ergibt sich eine Beschleunigungsdifferenz von $3 \cdot 10^{-12}\text{m/s}^2$ und damit ein Fehler von $3 \cdot 10^{-13}$ bei der Bestimmung von η . Dieser Fehler wird sich auch bei mehrfacher Wiederholung nicht herausmitteln. Analoge Probleme treten auch bei Kräften durch eingefrorene Feldern auf. Diese Felder unterscheiden sich zwar bei jedem Einkühlen, haben jedoch eine gewisse Vorzugsrichtung durch die Lage des Kryostaten im Magnetfeld der Erde.

Gelingt es, die systematischen Fehler zu reduzieren oder numerisch zu erfassen, so begrenzt die Rückwirkung des Detektors auf den Testkörper das Auflösungsvermögen. Wie in Kapitel 3.3.3 gezeigt wurde, läßt sich die Kraft in der Nähe der Mittellage durch eine lineare Abhängigkeit von der Auslenkung beschreiben, deren Federkonstante in den meisten Fällen positiv ist. Die Federkonstante k nimmt dabei quadratisch mit dem eingespeisten Strom I zu. Für positive k läßt sich die Bewegung des Körpers durch die Schwingungsgleichung $x(t) = A \sin \omega t + B \cos \omega t + C$ beschreiben, wobei $\omega^2 = k/m$ und $C = -a \cdot m/k$ ist. Die Konstanten A und B werden durch die Anfangsgeschwindigkeit und die Anfangsauslenkung bestimmt. Die Position $x = 0$ ist durch den Punkt bestimmt, an dem die Rückwirkung des Detektors verschwindet (Gleichgewichtslage). Die Bestimmung von a besteht also in einer Bestimmung von C . Für kleine Federkonstanten, bei denen $1/\omega$ deutlich größer als die Meßzeit t_m ist, entspricht die Abhängigkeit des Auflösungsvermögens σ_a für Beschleunigung den Beziehungen aus Kapitel 7.2, d.h. σ_a ist proportional $t_m^{-5/2}$. Für große Federkonstanten $1/\omega \ll t_m$ entspricht die Abhängigkeit zwischen σ_a und t_m den Verhältnissen bei einer reinen Positionsmessung, d.h. σ_a ist proportional zu $1/\sqrt{t_m}$. Das Positionsauflösungsvermögen δx ist entsprechend Kap. 3 umgekehrt proportional zum eingespeisten Strom I_0 ($\delta x = K_1/I_0$). Das Auflösungsvermögen σ_c für den Parameter C ist proportional zu $\delta x/\sqrt{t_m}$ ($\sigma_c \approx K_2 \delta x/\sqrt{t_m}$). Weiterhin gilt $\sigma_a = \sigma_c k/m$.

⁶Eine hohe Auflösung schränkt nämlich den Meßbereich ein. Bei den bisherigen Experimenten wurde die Empfindlichkeit des Detektors sogar gezielt verkleinert, um den Körper über seinen gesamten Bewegungsbe-
reich zwischen den Spulen (0,5 mm) beobachten zu können. Dies geschah durch Überbrücken der SQUID-
Eingangsspule mit einer kleinen Induktivität, so daß nur ein Teil von I_i vom SQUID detektiert wird und sich
damit die Empfindlichkeit um den Faktor 600 verringert [83].

⁷Damit ist die Abweichung gemeint, die systematisch bei der Messung der Position auftritt, also sich nicht
numerisch unterdrücken läßt.

Für große eingespeiste Ströme gilt damit:

$$\sigma_a \approx \frac{K_2 K_1}{m I_0 \sqrt{t_m}} \cdot k . \quad (8.1)$$

Dabei sind K_2 und K_1 Konstanten, wobei K_1 von den Parametern des Detektors abhängt und sich K_2 aus dem Auswerteverfahren ergibt. Berücksichtigt man weiterhin die Proportionalität zwischen k und I_0^2 ($k = K_3 \cdot I_0^2$), so folgt:

$$\sigma_a \approx \frac{K_1 K_2 K_3}{m \sqrt{t_m}} \cdot I_0 , \quad (8.2)$$

wobei sich K_3 aus dem Induktivitätsverlauf der Detektorspulen ergibt. Für große Ströme verschlechtert sich also das Auflösungsvermögen mit wachsendem Strom I_0 . Bei kleine Strömen verbessert sich dagegen das Auflösungsvermögen ($\sigma_a \sim 1/I_0$) mit wachsendem Strom. Es muß daher einen optimalen Strom geben, bei dem σ_a minimal wird. Die Größe dieses Stromes wird durch die Masse des Testkörpers, das Verhältnis von Rückwirkung und Empfindlichkeit des Detektors und durch die zur Verfügung stehende Meßzeit bestimmt. Mit wachsender Masse der Testkörper verschiebt sich der Wert für den optimalen Strom zu höheren Werten, so daß ein besseres Auflösungsvermögen möglich ist.

In der Praxis ergibt sich jedoch ein anderes Problem, das das erreichbare Auflösungsvermögen viel stärker einschränkt. Die Messung von C ist mit einem systematischen Fehler behaftet. Der Detektor gibt die Daten über die Position des Körper bezüglich eines eigenen Referenzpunktes aus. Für die Bestimmung von C benötigt man jedoch die Abstandswerte bezogen auf die Gleichgewichtslage, bei der die Rückwirkung des Detektors verschwindet. Die absolute Position dieser Gleichgewichtslage im Bezugssystem des Detektors ist nur mit einer beschränkten Genauigkeit Δx bekannt. Zum statistischen Fehler σ_a kommt also noch ein systematischer Fehler $\Delta a = \Delta x k / m$ der quadratisch mit dem eingespeisten Strom anwächst. Man sollte daher den Strom so wählen, daß $\sigma_a > \Delta a$ ist. Es ist aber auf jeden Fall sinnvoll, das Verhältnis zwischen Rückwirkung und Empfindlichkeit des Detektors möglichst klein zu halten und einen möglichst schweren Testkörper zu verwenden.

Wenn es gelingen würde, die statische Rückwirkung sehr klein zu halten, so wäre der nächste begrenzende Faktor eine thermisch bedingte stochastische Rückwirkung des Systems. Dazu soll der Detektor mit direkter Rückkopplung auf den Eingangskreis und zwei Detektorspulen betrachtet werden. Wie in Kap. 3.5 gezeigt wurde, übt dieser Detektor bei entsprechendem Abgleich keine Rückwirkung auf den Körper aus. Tritt jedoch aufgrund des Rauschens des SQUIDS eine Regelabweichung $2\Delta I$ auf, so führt dies zu einer Erhöhung des Stromes in der einen Spule auf $I_0 + \Delta I$ und zu einer Verringerung des Stromes in der anderen Spule auf $I_0 - \Delta I$. Zur Vereinfachung der Rechnung wurde dabei angenommen, daß sich der Körper in der Mitte zwischen den Spulen befindet ($L_1 \approx L_2$). Die Änderung der Ströme führt zu einer Kraft:

$$F = 1/2 L' ((I_0 + \Delta I)^2 - (I_0 - \Delta I)^2) \approx 2 I_0 \Delta I \cdot L' , \quad (8.3)$$

die proportional zum eingespeisten Strom I_0 ist. Untersucht man die Bewegung eines Körpers unter dem Einfluß einer normalverteilten stochastischen Kraft mit dem Frequenzspektrum $\sigma(\omega)$, so stellt man fest:

- Hat der Körper zum Zeitpunkt $t=0$ die Position 0 und die Geschwindigkeit 0, so ist die Position $x(t)$ zum Zeitpunkt t normalverteilt um den Punkt 0 mit der Standardabweichung $\sigma(t)$.
- Die Funktion $\sigma(t)$ hängt vom konkreten Frequenzspektrum ab. Für ein niederfrequentes Rauschen und kurze Meßzeiten ist $\sigma(t) \approx t^2 \cdot \sigma_F / (2m)$, wobei σ_F die Standardabweichung der Kraft ist. Für ein breitbandiges weißes Rauschen ist $\sigma(t)$ dagegen proportional zu $t^{3/2}$, während der Ausdruck für ein schmalbandiges hochfrequentes Rauschen proportional zu t ist.

Die stochastische Bewegung wird bei der Datenauswertung als Beschleunigung interpretiert und trägt damit zum statistischen Fehler von η bei. Da die stochastische Rückwirkung mit dem eingespeisten Strom zunimmt, während sich das Auflösungsvermögen des Detektors verbessert, gibt es auch hier einen optimalen eingespeisten Strom bei dem der statistische Fehler von η minimal ist.

Auch die Wechselwirkung des Körpers mit dem Restgas führt zu einer stochastischen Kraft auf den Körper und trägt damit zum statistischen Fehler von η bei⁸. Der Einfluß der stochastischen Störungen auf die Messung von η läßt sich nur durch eine Erhöhung der Masse des Körpers, eine Erhöhung der Meßzeit oder einer Verringerung der Temperatur der Meßanordnung verringern.

Die absolute untere Grenze dürften jedoch quantenelektrodynamische Phänomene setzen. So bewirken z.B. spontane Feldfluktuationen eine Kraft auf den Körper, die um so stärker wird je stärker die Feldstärke durch die Detektorspulen ist. Es hat also auch hier keinen Sinn, den eingespeisten Strom im Detektor beliebig zu erhöhen. Das Problem der quantenmechanischen Meßgrenze dürfte jedoch für praktische Experimente kaum eine Rolle spielen. Betrachtet man das Experiment als eine Messung der potentiellen Energie der Körper in einem durch die Kapsel gegebenen Bezugssystem, so stellt man fest, daß die Größe $\Delta E \cdot \Delta t = \Delta \eta \cdot g_0 \cdot m \cdot t_m = 9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 10^{-13} \cdot 0,3 \text{ kg} \cdot 2,5 \text{ s} \approx 7,5 \cdot 10^{-13} \text{ Ws}$ noch um viele Größenordnungen von \hbar entfernt ist.

⁸Neben der stochastischen Rückwirkung kann es auch zu gerichteten Kräften durch das Restgas kommen. So führt ein Temperaturgradient zum Beispiel zum sogenannten Radiometereffekt, bei dem die Teilchen auf der wärmeren Seite mit einer größeren Geschwindigkeit reflektiert werden als auf der kälteren Seite des Körpers. Auch Gasströmungen können den Körper beeinflussen.

Zusammenfassung und Schlußfolgerungen

Im Rahmen dieser Arbeit wurden verschiedene Detektorkonfigurationen betrachtet, wobei insbesondere Linearität und Rückwirkungen der Detektoren detaillierter untersucht wurden. Bei den aus der Literatur bekannten SQUID-basierten Positionsdetektoren (z.B. bei Gravimetern und Gravitationswellendetektoren, aber auch bei STEP) wurde diese Problematik wegen abweichender Anforderungen an das Meßsystem nicht hinreichend diskutiert.

Es konnte gezeigt werden, daß Tauchspulen eine deutlich größere Linearität und geringere Rückwirkung zeigen als die in der Literatur verwendeten oder vorgeschlagenen Flachspulen. Auch die mittlere Empfindlichkeit des Detektors war bei einem Bewegungsbereich des Testkörpers von 0,5 mm bei den untersuchten Tauchspulen deutlich größer als bei Flachspulen. Detektoren mit Flachspulen zeigten nur in den Randgebieten des Arbeitsbereiches vergleichbare Empfindlichkeiten, im wichtigen Mittelbereich (zentrierter Körper) war die Empfindlichkeit jedoch geringer. Aus diesem Grund werden im derzeitigen Meßsystem Tauchspulen eingesetzt.

Es konnte weiterhin gezeigt werden, daß die Rückwirkung des Detektors sowohl von der angestrebten Empfindlichkeit, als auch von der zweiten Ableitung der Induktivität L'' nach der Position abhängt. Durch Verwendung entsprechender Induktivitätsverläufe mit $L'' > 0$ kann man einen Detektor erzeugen, der über einen gewissen Bereich keine statische Rückwirkung auf den Testkörper ausübt.

Außerdem wurde untersucht, welche Induktivitätsverläufe zu einem linearen Detektor führen. Bei den aus der Literatur bekannten Detektorkonfigurationen ergaben sich Induktivitätsverläufe, die sich in der Praxis nur schwer über einen größeren Bereich realisieren lassen. Auch für diese Induktivitätsverläufe muß $L'' > 0$ sein. Obwohl auch kurze Tauchspulen einen gewissen Bereich besitzen in dem $L'' > 0$ ist, wurde im Meßsystem auf eine weitere Optimierung hinsichtlich der Linearität und der Rückwirkung verzichtet. Die Spulen wurden statt dessen so positioniert, daß die Testkörper jeweils ca. die Hälfte der Spulenhöhe ausfüllen. Bei den derzeitigen Auflösung der Experimente hat die Rückwirkung noch keinen Einfluß.

Die aus der Literatur bekannten Detektorschaltungen liefern für die bei Tauchspulen auftretenden linearen Induktivitätsverläufe weder einen linearen noch einen rückwirkungsfreien Detektor. Daher wurde eine neue Schaltungsvariante mit direkter Rückkopplung auf den Detektorkreis entwickelt, die beide Bedingungen gleichzeitig erfüllt. Die neue Schaltungsvariante erfordert nur geringe Änderungen am Meßsystem und der SQUID-Elektronik. Sie wurde jedoch bisher noch nicht in der Praxis erprobt. Sollte sich jedoch die Rückwirkung des Detektors bei späteren Experimenten als begrenzender Faktor erweisen, so kann dieses Problem durch den Einsatz der neuen Schaltungsvariante beseitigt werden. Wie linear der neue Detektor in der Praxis ist, und wie stark er auf die Testkörper zurückwirkt, hängt von der Linearität der Induktivitätsverläufe und der Übereinstimmung der Detektorspulen ab. Dazu müssen eventuell

Vorrichtungen zum Abgleich der Induktivitäten geschaffen werden.

Neben einer möglichst geringen Federkonstante in der Nähe der Gleichgewichtslage ist auch ein symmetrischer Aufbau der Spulen und eine symmetrische Verteilung des eingespeisten Flusses für eine möglichst geringe Rückwirkung des Detektors von großer Bedeutung. Es nutzt wenig, wenn zwar die Federkonstante gering ist, aber die Detektorspulen durch Abweichungen der Geometrien unterschiedliche Kräfte auf den Körper ausüben und damit eine konstante Differenzkraft erzeugen. Im Meßsystem sind jedoch noch keine Einrichtungen zum Abgleich der Induktivität vorgesehen, da dies beim derzeitigen Stand des Experimentes noch nicht erforderlich ist und sich der Abgleich auch noch nicht überprüfen ließe. Außerdem stellen zusätzliche bewegte Teile eine Fehlerquelle dar.

Es konnte gezeigt werden, daß in einem symmetrischen Detektor auch gleiche Flüsse in die jeweiligen supraleitenden Kreise eingespeist werden sollten. In diesem Fall werden verschiedene nichtlineare Beiträge im Positionssignal unterdrückt, und die Kräfte, die die Detektorspulen auf den Körper ausüben, heben sich bei zentrierter Lage auf. Außerdem wird der Einfluß seitlicher Bewegungen deutlich geringer. Eine symmetrische Flußverteilung läßt sich erreichen, indem man den Strom bei zentrierter Lage der Testkörper in den Detektor einspeist. Bei den bisherigen Experimenten lagen die Testkörper bei Einspeisung des Stromes auf der unteren Tragespule auf. Das Meßsystem besitzt zwar bereits eine Hebeeinrichtung, die es erlaubt, die Körper auch unter Schwerkraftbedingungen in die Mitte des Meßbereiches zu verschieben. Es besteht jedoch bei abgeschaltetem SQUID-Positionsdetektor noch keine Möglichkeit festzustellen, ob sich der Körper in der Mitte des Meßbereiches befindet.

Im Rahmen der Arbeit wurde ein Verfahren zur Berechnung der Momente von beliebigen symmetrischen Rotationskörper entwickelt. Für den aus der Literatur bekannten Spezialfall eines Zylinders konnte die Richtigkeit der erhaltenen Beziehung bestätigt werden. Unter Verwendung dieses Verfahrens wurde die Form der im derzeitigen Meßsystem eingesetzten Testkörper so optimiert, daß sie in inhomogenen Gravitationsfeldern eine möglichst gleiche Beschleunigung erfahren. Ob eine Optimierung bei der von uns angestrebten Genauigkeit tatsächlich notwendig ist, wurde nicht näher untersucht, da dies von der Masseverteilung im gesamten Meßsystem abhängt. Bei ungünstig geformten Testkörpern und ungünstiger Masseverteilung im Freeflyer hätte sich jedoch eine deutlich meßbare Differenzbeschleunigung ergeben.

Weiterhin wurde ein Verfahren zur schnellen präzisen Positionierung der Testkörper erarbeitet. Für dieses Verfahren wurde eine digitale Steuerung entwickelt und aufgebaut, die im derzeitigen Meßsystem zum Einsatz kommt. Erste Tests lassen erwarten, daß es möglich ist, die Testkörper innerhalb von 0,5 s an der gewünschten Stelle mit der geforderten Genauigkeit zur Ruhe zu bringen. Wegen experimenteller Probleme, die jedoch nicht mit der Steuerung zusammenhängen, konnte die Feinpositionierung jedoch noch nicht mit der gewünschten Genauigkeit getestet werden.

Die Untersuchungen zur Steuerung und zu systematischen Fehlern haben gezeigt, daß ein zusätzlicher Detektor wünschenswert wäre, der unabhängig von den SQUID-Positionsdetektoren die Absolutposition der Testkörper bestimmt. Die Auflösung dieses Detektors sollten im Bereich 100 Nanometer liegen.

Es wurden eine Reihe verschiedener Konfigurationen für die seitliche Stabilisierung diskutiert. Die derzeit eingesetzte Stabilisierung mit einer durchgehenden Mäanderspule reicht noch nicht aus, um den Körper hinreichend zu stabilisieren. Eine Unterteilung der Spule in mehrere Segmente würde zwar die Steifheit der Stabilisierung erhöhen. Zusätzlich wird jedoch auch eine Dämpfung der Bewegung benötigt. Ideal wäre dabei eine aktive Steuerung der Ströme in den Stabilisierungsspulen, wie sie bei der vertikalen Positionierung verwendet wird. Dazu fehlen jedoch im derzeitigen Meßsystem die erforderlichen Sensoren zur Bestimmung der Testkörperposition.

Es wurde ein allgemeiner analytischer Ausdruck zur Ermittlung des Eötvöskoeffizienten aus äquidistanten Datenpunkten ermittelt. Für dieses Auswerteverfahren wurde der Einfluß des Detektorrauschens auf das erzielbare Auflösungsvermögen untersucht und für verschiedene Meßzeiten, Samplingraten und Rauschspektren diskutiert. Dabei zeigte sich, daß das bisher im Labor nachgewiesene Auflösungsvermögen des Detektors um 1-2 Größenordnung höher liegt, als für die von uns angestrebte Genauigkeit von 10^{-13} erforderlich wäre. Das Auswerteverfahren ist gegebenenfalls anzupassen, wenn weitere systematische Fehler, wie z.B. die Rückwirkung und Nichtlinearität des Detektors oder diskrete Eigenschwingungen des Systems im Datenmodell berücksichtigt werden sollen. Dies kann jedoch erst geschehen, wenn konkrete Meßdaten einer Präzisionsmessung vorliegen.

Zum gegenwärtigen Zeitpunkt spielt das Auflösungsvermögen des Sensors eine untergeordnete Rolle für die erzielbare Genauigkeit bei der Bestimmung von η . Als größte Probleme erweisen sich derzeit:

- eingefrorene Flüsse im System, die die Empfindlichkeit der Detektoren, die Reproduzierbarkeit und den Abgleich der Empfindlichkeiten beeinflussen,
- die Beseitigung zusätzlicher Kräfte auf die Testkörper, deren Ursache derzeit noch ungeklärt ist,
- die Unterdrückung des Einflusses der seitlichen Bewegung,
- die Bereitstellung eines Positionssignals, das reproduzierbar von der Absolutposition der Schwerpunkte der Körper abhängt und als Signal für die vertikale Positionierung dienen kann.

Mit dieser Arbeit konnte gezeigt werden, daß SQUID-Positionsdetektoren hinsichtlich ihres Auflösungsvermögens, ihrer Rückwirkung und ihres Dynamikbereiches in der Lage sind, die Beschleunigungsdifferenz der Testkörper mit der erforderlichen Genauigkeit zu bestimmen, um am Fallturm Bremen das SÄP mit einer Genauigkeit von 10^{-13} zu überprüfen. Es sind jedoch noch eine Reihe von praktischen Problemen zu lösen, um die am Boden erzielte Genauigkeit auch im Fallexperiment zu realisieren. Zur weiteren Verbesserung des Systems sind jedoch noch eine Vielzahl weiterer Experimente notwendig, ehe eine abschließende Aussage über die erreichbare Genauigkeit getroffen werden kann.

Liste der Symbole

\mathbf{A}	magnetisches Vektorpotential
\mathbf{a}	Beschleunigung
B_r, B_z	Komponenten der magnetischen Induktion in Zylinderkoordinaten
d	Abstand
E	Energie
e	Elementarladung
\mathbf{F}	Kraft
f	Hilfsfunktion bei der Berechnung der Rückwirkungen des Detektors (siehe Kap. 3.3.3 bzw. 3.4.3)
f', f''	Ableitungen der Hilfsfunktionen nach der Position x bzw. x_1
\tilde{f}	spezifische Kraft pro Längeneinheit des Drahtes
f	Frequenz
\mathbf{g}	Gradient des Gravitationsfeldes ; entspricht der Fallbeschleunigung am entsprechenden Ort
$\tilde{\mathbf{g}}$	Gradient der Fallbeschleunigung
g_0	Fallbeschleunigung in der Nähe der Erdoberfläche
G_1, G_2, \dots	Inverser Wert der jeweiligen Induktivität
G_g	Gravitationskonstante
h	Hilfsfunktion bei der Berechnung der Rückwirkungen des Detektors (siehe Kap. 3.3.3 bzw. 3.4.3)
h', h''	Ableitungen der Hilfsfunktionen nach der Position x bzw. x_1
H_c	kritische Feldstärke
H_x, H_y	x bzw. y Komponente der magnetischen Feldstärke
h	Abstand (z.B. der Drähte von der supraleitenden Ebene)
h_p	Plancksche Konstante
I_i	Strom in der Eingangsspule des SQUIDs
δI_i	rauschbegrenztes Stromauflösungsvermögen des SQUIDs
\tilde{I}_i	Strom in der Eingangsspule des SQUIDs (andere Argumente)
I_0	eingespeister Strom im Detektorkreis
I_a, I_b	eingespeiste Ströme in einem differentiellen Detektor
\hat{I}_i	Empfindlichkeit des linearen Detektors (siehe Kap. 3.3.4 bzw. 3.4.4)
I_R	Rückgekoppelter Strom im Rückkopplungstrafo bei Detektoren mit direkter Rückkopplung
J	Trägheitsmoment

$J_n(x)$	Besselfunktion n-ter Ordnung
\tilde{K}, \tilde{K}_2	Gesamtrückkopplung der SQUID-Elektronik
\bar{K}_p	gewichtetes Gravitationsmoment p des Körper (Produkt aus Masse m und Moment k_p des Körpers)
$K_e(k), E_e(k)$	Elliptische Integrale 1. bzw. 2. Art (siehe Kap. 4.5 Gl. (4.16))
K, K_1, K_2, K_3	Federkonstanten, die die Rückwirkung des Detektors auf die Testkörper beschreiben
k_p	p -tes Moment der Masseverteilung
k_{SQ}	Kopplungskonstante zwischen der Eingangsspule des SQUIDs und dem SQUID-Ring
k_I, k_R	Integrations- und Rückkopplungskonstante im Modell der SQUID-Elektronik
L	Induktivität
L_i	Induktivität der SQUID-Eingangsspule
L_k	Induktivität der k -ten Detektorspule ($k = 1, 2, \dots$)
L_{SQ}	Induktivität des SQUID-Ringes
L_R	Induktivität der Sekundärseite des Rückkopplungstrafo
\hat{L} bzw. \hat{L}_a, \hat{L}_b	Faktor im linearen Ansatz für die Induktivität
L', L''	erste bzw. zweite Ableitung der jeweiligen Induktivität (in der Umgebung der Position $x = 0$)
L_0	Induktivität der Detektorspulen bei zentrierter Lage des Körpers
L_a, L_b	Induktivitäten der Detektorspulen in einem differentiellen Detektor bei zentrierter Lage der jeweiligen Testkörper
l	Länge
\tilde{l}	spezifische Induktivität pro Längeneinheit des Drahtes
\mathbf{M}	Drehmoment
M_{SQ}	Gegeninduktivität zwischen der Eingangsspule des SQUIDs und dem SQUID-Ring
M_R	Gegeninduktivität des Rückkopplungstrafo bei Detektoren mit direkter Rückkopplung
m	Masse
m_s	schwere Masse des Körpers
m_t	träge Masse des Körpers
N	Anzahl
p	Druck (Kraft pro Fläche)
$P_n(x)$	Legendre Polynome
\mathbf{r}	Orts-, Abstandsvektor
R	Radius, Abstand
R_z	Radius eines Zylinders
t	Zeit
t_m	Dauer der Messung

T_c	kritische Temperatur eines Supraleiters
U	Spannung, elektrisches Potential
U_G	Potential des Gravitationsfeldes
u_a, u_b	Hilfsfunktionen siehe Gl. (3.91)
v	Geschwindigkeit
x, y, z	Koordinaten im kartesischen Koordinatensystem
x_d	Verschiebung zweier Testkörper gegeneinander $x_d = x_1 - x_2$
x_m	gemeinsame Verschiebung beider Körper
δx	rauschbegrenztes Ortsauflösungsvermögen des Positionsdetektors
η	Eötvöskoeffizient
ϕ	Phase eines Quantenzustandes
Φ_0	Flußquant
$\Phi_I, \Phi_{II}, \Phi_1, \dots$	Eingefrorenen Flüsse in den jeweiligen supraleitenden Kreisen
$\hat{\Phi}$	normierter Fluß
$\hat{\varphi}$	normierte Flußdifferenz, siehe Kap. 3.7.4
φ	Koordinate im Zylinder- bzw. Kugelkoordinatensystem
μ_0	magnetische Feldkonstante
θ	Koordinate im Kugelkoordinatensystem
σ_k	Standardabweichung des Fourierkoeffizienten k bei Fourieranalyse eines thermischen Rauschens (siehe Kap. 7)
$\sigma(\omega)$	spektrale Verteilung der Standardabweichung der Fourierkoeffizienten (siehe Kap. 7)
σ_{γ_3}	Standardabweichung bei der Schätzung des Parameters γ_3 (siehe Kap. 7)
σ_a	Standardabweichung bei der Schätzung der Beschleunigung
θ	Winkel
λ_L	Londonsche Eindringtiefe des Supraleiters
$\rho(\mathbf{r})$	Dichte der Masseverteilung am Ort \mathbf{r}
ω	Kreisfrequenz
Ω	Anstiegsrate des normierten Flusses

Abkürzungen

Abb.	Abbildung
ART	Allgemeine Relativitätstheorie
DGL	Differentialgleichung
DLR	Deutsche Agentur für Luft- und Raumfahrt e.V.
Gl.	Gleichung
Gln.	Gleichungen
PED	Phasenempfindlicher Detektor
SÄP	Schwaches Äquivalenzprinzip
SQUID	Superconducting Quantum Interference Device
STEP	Satellite Test of the Equivalence Principle
ZARM	Zentrum für angewandte Raumfahrttechnologie und Mikrogravitation

Literaturverzeichnis

- [1] *Teilchen, Felder und Symmetrien: Quantenfeldtheorie und die Einheit der Naturgesetze*, 4. Aufl. Spektrum der Wissenschaft Verlagsgesellschaft, 1988 (Spektrum der Wissenschaften: Verständliche Forschung)
- [2] THORNE, K. S. ; LEE, D. L. ; LIGHTMAN, A. P.: Foundations for a theory of gravitation theories. In: *Phys. Rev. D* 7 (1973), S. 3563–3578
- [3] HAWKING, S. W. (Hrsg.) ; ISRAEL, W. (Hrsg.): *General Relativity: An Einstein centenary survey*. Cambridge : Cambridge University Press, 1979
- [4] CHEN, Y. ; COOK, A.: *Gravitational Experiments in the Laboratory*. Cambridge, Massachusetts : Cambridge University Press, 1993
- [5] In: WILL, C. M.: *Confirmation between gravitation theory and experiment*. siehe [3]
- [6] DITTUS, H. ; EVERITT, F. ; LÄMMERZahl, C. ; SCHÄFER, G.: Gravitation im Test. In: *Physikalische Blätter* 55 (1999), November, S. 39 – 46
- [7] In: SOFFEL, M.: *Experimental Gravity*. siehe [8]
- [8] RIFFERT, H. (Hrsg.) ; RUDEN, H. (Hrsg.) ; NOLLERT, H.-P. (Hrsg.) ; HEHL, F. (Hrsg.): *Relativistic astrophysics*. Braunschweig : Vieweg, 1998
- [9] NIETZSCHE, S.: *Aufbau und Test von Grundanordnungen für Positionsdetektoren mit SQUID*, F. Schiller Universität Jena, Diplomarbeit, 1996
- [10] EÖTVÖS, R.: Über die Anziehung der Erde auf verschiedene Substanzen. In: *Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn* 8 (1890), S. 65–68
- [11] EINSTEIN, A.: Über das Relativitätsprinzip und die aus demselben gezogenen Folgerungen. In: *Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik* 4 (1907), S. 411–462
- [12] EINSTEIN, A.: Über den Einfluß der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes. In: *Annalen der Physik* 35 (1911), S. 898–908
- [13] DAMOUR, T.: Testing the equivalence principle: why and how? In: *Class. Quantum. Grav.* 13 (1996), S. A33–A41
- [14] LÄMMERZahl, C.: On the equivalence principle in quantum theory. In: *Gen. Relativ. Grav.* 28 (1996), Nr. 9, S. 1043–1070

- [15] FAYET, P.: New Interactions and the standard models. In: *Class. Quantum. Grav.* 13 (1996), S. A19–A32
- [16] FISCHBACH, E. ; SUDARSKY, D. ; SZUFER, A. ; TALMADGE, C. ; ARONSON, S.: Reanalysis of the Eötvös Experiment. In: *Phys. Rev. Letters* 56 (1986), S. 3–6
- [17] ADELBERGER, E.G. ; STUBBS, C. W. ; ROGERS, W. F. ; RAAB, F. J. ; HECKEL, B. R. ; GUNDLACH, J. H. ; SWANSON, H. E. ; WATANABE, R.: Testing the equivalence principle in the field of the Earth: Particle physics at masses below $1\text{ }\mu\text{ev}$? In: *Phys. Rev. D* 42 (1990), S. 3267 – 3292
- [18] ROLL, P. G. ; KROTKOV, R. V. ; DICKE, R. H.: The equivalence of inertial and passive gravitational mass. In: *Ann. Phys.* 26 (1964), S. 442–517
- [19] SU, Y. ; HECKEL, B. R. ; ADELBERGER, E. G. ; GUNDLACH, J. H. ; HARRIS, M. ; SMITH, G. L. ; SWANSON, H. E.: New tests of the universality of free fall. In: *Phys. Rev. D* 50 (1994), S. 3614–3636
- [20] BRAGINSKI, V. B. ; CAVES, C. M. ; THORNE, K. S.: Laboratory experiments to test relativistic gravity. In: *Phys. Rev. D* 15 (1977), S. 2047
- [21] KURODA, K. ; MIO, N.: Test of a Composition Dependent Force by a Free-Fall Interferometer. In: *Phys. Rev. Lett.* 62 (1989), S. 1941
- [22] NIEBAUER, T. M. ; MCHUGH, M. P. ; FALLER, J. E.: Galilean test for the fifth force. In: *Phys. Rev. Lett.* 59 (1987), S. 609–612
- [23] NORDVEDT, K.: Testing relativity with laser ranging to the Moon. In: *Phys. Rev.* 170 (1968), S. 1186–1187
- [24] NORDVEDT, K.: Significance of 'second-order' light propagation experiments in the solar system. In: *Class. Quantum. Grav.* 13 (1996), S. A11–A18
- [25] BARLIER, F.: STEP Assessment Study Report. In: *SCI(91)* 4 (1991), January
- [26] PAIK, H. J.: Principle of STEP accelometer design. In: *Class. Quantum. Grav.* 13 (1996), S. A79 – A86
- [27] EVERITT, C.W.F. ; WORDEN, P. ; RYANS-CULCLAGER, L. ; FARNSWORTH, R.: STEP NASA Research Announcement. In: *NRA-96-HEDS-03* (1997), March
- [28] SPALLICCI, A. ; BRILLET, A. ; BUSCA, G. ; CATASTINI, G. ; PINTO, I. ; ROXBURGH, I. ; SALOMAN, D. ; SOFFEL, M. ; VEILLET, C.: Experiments on fundamental physics on the space station. In: *Class. Quantum. Grav.* 14 (1997), Nr. 11, S. 2971–2989
- [29] ONNES, H. K.: In: *Leiden Commun.* 122b (1911), S. 124
- [30] TILLEY, D. ; TILLEY, J.: *Superfluidity and Superconductivity*. Bristol : Adam Hilger Ltd., 1986

- [31] TINKHAM, M.: *Introduction to Superconductivity*. New York : McGraw-Hill Inc.
- [32] MEISSNER, W. ; OCHSENFELD, R.: In: *Naturwissenschaften* 21 (1933), S. 787
- [33] POOLE, C. ; FARACH, H. ; CRESWICK, R.: *Superconductivity*. Academic Press, 1995
- [34] BUCKEL, W.: *Supraleitung, 4. Aufl.* Weinheim : VCH Verlagsgesellschaft, 1990
- [35] JOSEPHSON, B. D.: In: *Phys. Lett.* 1 (1962), S. 251–253
- [36] DITTUS, H. ; EIGENBROD, Chr. ; KACZMARCZIK, U. ; MIDDELBERG, J. ; RATH, H.J. ; SCHWARK, B.: High quality of microgravity environment during short time experiments on the Drop Tower Bremen. In: EUROPEAN SPACE AGENCY (ESA-SP 295) (Hrsg.): *Proc. 7th Europ. Symp. on Materials and Fluid Sciences in Microgravity*. Paris, 1989, S. 703 – 710
- [37] DITTUS, H.: Drop Tower Bremen - A weightlessness laboratoty on Earth. In: *Endeavour* 15 (1991), S. 72 – 78
- [38] VODEL, W. ; DITTUS, H. ; NIETZSCHE, S. ; KOCH, H. ; ZAMECK GLYSCINSKI, J. v. ; NEUBERT, R. ; LOCHMANN, S. ; MEHLS, C. ; LOCKOWANDT, D.: High Sensitive DC SQUID based position Detectors for applikation in gravitational experiments at the Drop Tower Bremen. In: *220. WE-Heraeus-Seminar: Gyros, Clocks and Interferometers: Testing General Relativity in Space, Bad Honnef, 22–27 August 1999*, 1999
- [39] W.VODEL ; KOCH, H. ; NEUBERT, R. ; NIETZSCHE, S. ; PILZ, M. ; ZAMECK GLYSCINSKI, J. v.: Verbessertes SQUID-System für spezielle Anwendungen in der Präzisionsmeßtechnik. In: *Tagung Kryoelektronische Bauelemente 98, Braunschweig, 11.–13.10. 1998*, 1998
- [40] VODEL, W. ; MÄKINIEMI, K.: An ultra low noise SQUID system for biomagnetic research. In: *Measurement Science and Technology* 3, no. 2 (1992), December, S. 1155–1160
- [41] SACHSLEHNER, F. ; VODEL, W.: Two-channel DC-SQUID picovoltmeter for measurement of low-field Hall coefficient and electrical resitance from 4,2 to 100 K. In: *Cryogenics* 38 (1998), S. 293–298
- [42] DIECKMAN, V. ; JÜRGENS, R. ; BECKER, W. ; ELIAS, H. ; VODEL, W.: RF-SQUID to DC-SQUID upgrade of a 28-channel magnetoencephalography (MEG) system. In: *Measur. Sci. and Techn.* 7 (1996), May, S. 844–852
- [43] PETERS, A. ; VODEL, W. ; KOCH, H. ; NEUBERT, R. ; REEG, H. ; ; SCHROEDER, C.: A Cryogenic Current Comperator for absolut measurement of nA beams. In: *8-th Beam Instrumentation Workshop, Stanford Linear Accel. Center, Stanford, CA., May 4–7, 1998*, 1998, S. 163–180
- [44] VODEL, W. ; NIETZSCHE, S. ; KOCH, H. ; ZAMECK GLYSCINSKIAND H. DITTUS, J. v. ; MEHLS, C. ; LOCHMANN, S.: Einsatz von DC-SQUIDS in einem Gravitationsexperiment

- am Fallturm Bremen. In: *Verhandlungen d. DPG: Frühjahrstagung Münster 1999* Bd. 5, 2000, S. 973
- [45] DITTUS, H. ; GREGER, R. ; LOCHMANN, St. ; VODEL, W. ; KOCH, H. ; NIETZSCHE, S. ; ZAMECK GLYSCINSKI, J. v. ; MEHLS, C. ; MAZILU, P.: Testing the Weak Equivalence Principle at the Bremen Drop Tower: Report on recent developments. In: *Class. Quantum. Grav.* 13 (1996), S. A43 – A51
 - [46] VODEL, W. ; KOCH, H. ; ZAMECK GLYSCINSKI, J. v. ; MEHLS, C. ; NIETZSCHE, S.: Superconducting Accelerometer with DC SQUID. In: *2nd European Conference on Applied Superconductivity, 3-6 July, 1995, Edinburgh, Scotland* Bd. 2, Institute of Physics Publishing, 1995, S. 1495–1498
 - [47] VODEL, W. ; KOCH, H. ; NIETZSCHE, S. ; ZAMECK GLYSCINSKI, J. v. ; MEHLS, C.: Testing the Weak Equivalence Principle on Drop Tower Bremen - Report on Recent Developments. In: *Proc. 2nd Drop Tower Days 1996, Bremen, July 8–11, 1996*
 - [48] VODEL, W. ; KOCH, H. ; NIETZSCHE, S. ; ZAMECK GLYSCINSKI, J. v.: Recent Results of SQUID-Based Position Detectors for Gravitational Experiments. In: *3rd European Conference on Applied Superconductivity, Twente, June 30–July 3, 1997*, 1997, S. 781–784
 - [49] VODEL, W. ; KOCH, H. ; NIETZSCHE, S. ; ZAMECK GLYSCINSKI, J. v. ; DITTUS, H. ; LOCHMANN, S. ; MEHLS, C.: High Sensitive SQUID Based Position Detectors for Application in Gravitational Experiments. In: *The Eighth Marcel Grossmann Meeting, Jerusalem/Israel, June 22–27, 1997*, World Scientific, 1997, S. 1232–1234
 - [50] VODEL, W. ; KOCH, H. ; NIETZSCHE, S. ; ZAMECK GLYSCINSKI, J. v. ; NEUBERT, R. ; PILZ, M. ; DITTUS, H. ; LOCHMANN, S. ; MEHLS, C.: Application of High Performance LTS SQUID Systems in Gravitational Experiments. In: *IEEE Transaction on Applied Superconductivity* 9, no. 2 (1999), June, S. 4119–4121
 - [51] VODEL, W. ; KOCH, H. ; NIETZSCHE, S. ; ZAMECK GLYSCINSKI, J. von ; DITTUS, H. ; LOCHMANN, S. ; MEHLS, C.: Low noise LTS SQUIDS for application in gravitational experiments. In: *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* 7, no. 2 (1997), June, S. 3343–3346
 - [52] KOCH, H. ; VODEL, W. ; NIETZSCHE, S. ; ZAMECK GLYSCINSKI, J. v. ; NEUBERT, R. ; PILZ, M.: Drop tower experiments with liquid helium cryostats. In: *Space Cryogenics Workshop, ESTEC, Noordwijk, NL, 20–21 Juli, 1998*, 1998, S. 157–160
 - [53] DITTUS, H. ; VODEL, W. ; LOCHMANN, S. ; MEHLS, C. ; NIETZSCHE, S. ; ZAMECK GLYSCINSKI, J. v.: Die aktuellen Freifall-Tests zum Schwachen Äquivalenzprinzip. In: *Verhandlungen d. DPG: 64. Physikertagung Dresden 2000* Bd. 3, 2000, S. 190

- [54] DITTUS, H. ; VODEL, W. ; KOCH, H. ; NIETZSCHE, S. ; ZAMECK GLYSCINSKI, J. v. ; MEHLS, C. ; GREGER, R. ; LOCHMANN, S.: Hatte Einstein recht? Test des Äquivalenzprinzips am Fallturm Bremen. In: *Verhandlungen d. DPG: Frhjahrstagung Jena 1996*, 1996, S. 147
- [55] VODEL, W. ; NIETZSCHE, S. ; ZAMECK GLYSCINSKI, J. v. ; KOCH, H. ; NEUBERT, R.: Application of SQUID based position detectors for testing the Weak Equivalence Principle at the drop tower Bremen. In: *4-th European Conference on Applied Superconductivity, Sitges, September 14-17, 1999*, 1999
- [56] GRAFE, H. ; LOOSE, J. ; KÜHN, H.: *Grundlagen der Elektrotechnik, Band1 (10. Aufl.)*. Berlin : Verlag Technik, 1983
- [57] VODEL, W. ; SEIDEL, P. ; BLÜTNER, K. ; WEBER, P.: High performance d.c. SQUIDS and some aspects of their application at working temperature below 4.2 K. In: *Proc. of the STEP Symposium, Pisa, Italy, 6-8 April, 1993*, 1996, S. 545–550
- [58] VODEL, W. ; KOCH, H. ; ZAMECK GLYSCINSKI, J. von ; MEHLS, C. ; NIETZSCHE, S. *Application of High Performance DC SQUID Systems in Fundamental Physics*. (Vortrag 5th International Superconductive Electronics Conference, Nagoya, Japan). September 1995
- [59] VODEL, W. ; KOCH, H. ; NIETZSCHE, S. ; ZAMECK GLYSCINSKI, J. v. ; DITTUS, H. ; LOCHMANN, S. ; MEHLS, C.: Low Noise LTS SQUIDS for Application in Gravitational Experiments. In: *IEEE Transactions on Applied Superconductivity* 7, no. 2 (1997), June, S. 3343–3346
- [60] VODEL, W. ; NIETZSCHE, S. ; KOCH, H. ; ZAMECK GLYSCINSKI, J. v.: DC SQUID Based Position Detector for Gravitational Experiments. In: *Applied Superconductivity* 6, no. 10-12 (1998), S. 767–775
- [61] CHAN, H. A. ; PAIK, H. J.: Superconducting gravity gradiometer for sensitive gravity measurement. In: *Phys. Rev. D* 35 (1987), S. 3551–3571
- [62] CLARKE, J. ; GOUBAU, W. ; KETCHEN, M.: In: *J. Low Temp. Phys.* 25 (1976), S. 99–144
- [63] NEUBERT, R. *Private Mitteilung*
- [64] NIETZSCHE, S. *Dissertation*. (in Vorbereitung)
- [65] LOCHMANN, S. *Private Mitteilung*
- [66] LEHNER, G.: *Elektromagnetische Feldtheorie*. Berlin : Springer Verlag, 1990
- [67] PHILLIPOW, E.: *Grundlagen der Elektrotechnik, (8. Aufl.)*. Berlin : Verlag Technik, 1988
- [68] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A.: *Taschenbuch der Mathematik*. Leipzig : BSB B.G Teubner Verlagsgesellschaft, 1979

- [69] LOCKERBIE, N. ; XU, X. ; VERYASHKIN, A.V.: Differential gravitational coupling between cylindrical-symmetric, concentric test masses and an arbitrary gravitational source: relevance to the STEP experiment. In: *Class. Quantum. Grav.* 10 (1993), S. 1575
- [70] LOCKERBIE, N. *Private Mitteilung*
- [71] LOCKERBIE, N. ; XU, X. ; VERYASHKIN, A.V. ; HOSEY, M.A.: The gravitational coupling between longitudinal segments of a hollow cylinder and an arbitrary gravitational source: Relevance to the STEP experiment. In: *Class. Quantum Grav.* 13 (1996), S. 2041 – 2059
- [72] TOUBOUL, P. ; RODRIGUES, M. ; BERNARD, A.: Electrostatic accelorameters for the equivalence principle in space. In: *Class. Quantum. Grav.* 13 (1996), S. A67–A78
- [73] BUCHHOLD, T.: The magnetic forces on Superconductors and their Applications for magnetic bearings. In: *Cryogenics* (1960)
- [74] HARDING, J. ; TUFFIAS, R.: Cryogenic gyros. In: *Space/ Aeronautics* 36 (1961), S. 133
- [75] MOON, F. ; CHANG, P.: High Speed rotation of magnets on superconducting Bearings. In: *Appl. Phys. Lett.* 56 (1990), S. 397–399
- [76] PROTHERO, W. ; GOODKIND, J.: A superconducting gravimeter. In: *Rev. Sci. Instr.* 39, no. 9 (1968), S. 1257 – 1262
- [77] KAREN, P. ; GILLIES, G. ; RITTER, R.: Meissner Effekt Torsion suspension. In: *Rev. Sci. Instr.* 61 (1990), S. 1494–1499
- [78] SHEAHEN, T.: *Introduction to High Temperature Superconductivity*. New York : Plenum Press, 1994
- [79] MOON, F. ; YANOVIK, M. ; WARE, R.: Hysteretic Levitation forces in superconducting ceramics. In: *Appl. Phys. Lett* 52 (1988), S. 1534
- [80] PRESS, W. H. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T. ; FLANNERY, B. P.: *Numerical Recipes in C*. Cambridge, Massachusetts : Cambridge University Press, 1992
- [81] NIETZSCHE, S. *Private Mitteilung*
- [82] NIETZSCHE, S. *Private Mitteilung*
- [83] NIETZSCHE, S. *Private Mitteilung*

Ehrenwörtliche Erklärung

Ich erkläre hiermit ehrenwörtlich, daß ich die vorliegende Arbeit selbständig, ohne unzulässige Hilfe Dritter und ohne Benutzung anderer Hilfsmittel und Literatur angefertigt habe. Die aus anderen Quellen direkt oder indirekt übernommenen Daten und Konzepte sind unter Angabe der Quelle gekennzeichnet.

Weitere Personen waren an der inhaltlich-materiellen Erstellung der vorliegenden Arbeit nicht beteiligt. Insbesondere habe ich hierfür nicht die entgeltliche Hilfe von Vermittlungs- bzw. Beratungsdiensten (Promotionsberater oder andere Personen) in Anspruch genommen. Niemand hat von mir unmittelbar oder mittelbar geldwerte Leistungen für Arbeiten erhalten, die im Zusammenhang mit dem Inhalt der vorgelegten Dissertation stehen.

Die Arbeit wurde bisher weder im In- noch im Ausland in gleicher oder ähnlicher Form einer anderen Prüfungsbehörde vorgelegt.

Die geltende Promotionsordnung der Physikalisch-Astronomischen Fakultät ist mir bekannt.

Ich versichere ehrenwörtlich, daß ich nach bestem Wissen die reine Wahrheit gesagt und nichts verschwiegen habe.

Jena, 12.07.2000